Logique intuitionniste

Kevin Quirin, avec Vítězslav Švejdar

Université Charles, Faculté des Arts, Département de Logique

Été 2011

Introduction

Introduction

La logique intuitionniste

Introduction

La logique intuitionniste

Sémantique de Kripke

Introduction

La logique intuitionniste

Sémantique de Kripke

Références

Historique

- Popularisée par L.E.J Brouwer en 1907

Historique

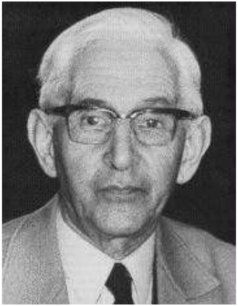
- Popularisée par L.E.J Brouwer en 1907
- S'oppose au logicisme (B. Russel, G. Cantor) et au formalisme (D. Hilbert)

Historique

- Popularisée par L.E.J Brouwer en 1907
- S'oppose au logicisme (B. Russel, G. Cantor) et au formalisme (D. Hilbert)
- Formalisée par A. Heyting

Historique

- Popularisée par L.E.J Brouwer en 1907
- S'oppose au logicisme (B. Russel, G. Cantor) et au formalisme (D. Hilbert)
- Formalisée par A. Heyting



Principes généraux

L'intuitionnisme rejette deux principes admis jusque là : le *tiers-exclu* et l'*existentiel non constructif*.

Principes généraux

L'intuitionnisme rejette deux principes admis jusque là : le *tiers-exclu* et l'*existentiel non constructif*.

Voyons un exemple qui peut faire comprendre ce point de vue.

Principes généraux

L'intuitionnisme rejette deux principes admis jusque là : le *tiers-exclu* et l'*existentiel non constructif*.

Voyons un exemple qui peut faire comprendre ce point de vue.

Proposition

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Principes généraux

L'intuitionnisme rejette deux principes admis jusque là : le *tiers-exclu* et l'*existentiel non constructif*.

Voyons un exemple qui peut faire comprendre ce point de vue.

Proposition

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Démonstration.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, OK.

Sinon, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est rationnel. $\square$

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- *a* est une preuve de $\varphi \wedge \psi$ si *a* est un couple (b, c) où *b* et *c* sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- a est une preuve de $\varphi \wedge \psi$ si a est un couple (b, c) où b et c sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;
- a est une preuve de $\varphi \vee \psi$ si a est un couple (b, c) où b est 0 ou 1, et c est une preuve de φ si $b = 0$, et de ψ sinon ;

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- *a* est une preuve de $\varphi \land \psi$ si *a* est un couple (b, c) où *b* et *c* sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;
- *a* est une preuve de $\varphi \lor \psi$ si *a* est un couple (b, c) où *b* est 0 ou 1, et *c* est une preuve de φ si $b = 0$, et de ψ sinon ;
- *a* est une preuve de $\varphi \to \psi$ si *a* est une construction qui transforme une preuve de φ en une preuve de ψ ;

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- a est une preuve de $\varphi \wedge \psi$ si a est un couple (b, c) où b et c sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;
- a est une preuve de $\varphi \vee \psi$ si a est un couple (b, c) où b est 0 ou 1, et c est une preuve de φ si $b = 0$, et de ψ sinon ;
- a est une preuve de $\varphi \rightarrow \psi$ si a est une construction qui transforme une preuve de φ en une preuve de ψ ;
- a ne peut pas être une preuve de $\perp$;

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- a est une preuve de $\varphi \wedge \psi$ si a est un couple (b, c) où b et c sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;
- a est une preuve de $\varphi \vee \psi$ si a est un couple (b, c) où b est 0 ou 1, et c est une preuve de φ si $b = 0$, et de ψ sinon ;
- a est une preuve de $\varphi \rightarrow \psi$ si a est une construction qui transforme une preuve de φ en une preuve de ψ ;
- a ne peut pas être une preuve de $\perp$;
- a est une preuve de $\forall x \varphi(x)$ si a est une construction qui transforme chaque x de D en une preuve $a(x)$ de $\varphi(x)$;

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

- a est une preuve de $\varphi \wedge \psi$ si a est un couple (b, c) où b et c sont des preuves de φ et de ψ respectivement ;
- a est une preuve de $\varphi \vee \psi$ si a est un couple (b, c) où b est 0 ou 1, et c est une preuve de φ si $b = 0$, et de ψ sinon ;
- a est une preuve de $\varphi \rightarrow \psi$ si a est une construction qui transforme une preuve de φ en une preuve de ψ ;
- a ne peut pas être une preuve de $\perp$;
- a est une preuve de $\forall x \varphi(x)$ si a est une construction qui transforme chaque x de D en une preuve $a(x)$ de $\varphi(x)$;
- a est une preuve de $\exists x \varphi(x)$ si a est un couple (x, c) où x est dans D, et c est une preuve de $\varphi(x)$.

Disparition de quelques propriétés

Certaines formules ne sont plus des théorèmes :

- La double négation :

$$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

Disparition de quelques propriétés

Certaines formules ne sont plus des théorèmes :

- La double négation :

$$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

- Loi de Morgan :

$$(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Disparition de quelques propriétés

Certaines formules ne sont plus des théorèmes :

- La double négation :

$$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

- Loi de Morgan :

$$(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

- Double Negation Shift :

$$\forall x \neg\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\neg\forall x \varphi(x)$$

Disparition de quelques propriétés

Certaines formules ne sont plus des théorèmes :

- La double négation :

$$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

- Loi de Morgan :

$$(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

- Double Negation Shift :

$$\forall x \neg\neg\varphi(x) \to \neg\neg\forall x \varphi(x)$$

- Principe d'indépendance des prémisses :

$$(\varphi \to \exists x \sigma(x)) \to \exists x(\varphi \to \sigma(x))$$

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\perp$, alors $p^o := \neg\neg p$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\bot$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\bot^o := \bot$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\perp$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\perp^o := \perp$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\perp$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\perp^o := \perp$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;
- $(\varphi \vee \psi)^o := \neg(\neg\varphi^o \wedge \neg\psi^o)$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\bot$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\bot^o := \bot$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;
- $(\varphi \vee \psi)^o := \neg(\neg\varphi^o \wedge \neg\psi^o)$;
- $(\varphi \to \psi)^o := \varphi^o \to \psi^o$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\bot$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\bot^o := \bot$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;
- $(\varphi \vee \psi)^o := \neg(\neg\varphi^o \wedge \neg\psi^o)$;
- $(\varphi \to \psi)^o := \varphi^o \to \psi^o$;
- $(\forall x \varphi(x))^o := \forall x \varphi^o(x)$;

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\bot$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\bot^o := \bot$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;
- $(\varphi \vee \psi)^o := \neg(\neg\varphi^o \wedge \neg\psi^o)$;
- $(\varphi \to \psi)^o := \varphi^o \to \psi^o$;
- $(\forall x \varphi(x))^o := \forall x \varphi^o(x)$;
- $(\exists x \varphi(x))^o := \neg\forall x \neg\varphi^o(x)$.

Lien entre les logiques classiques et intuionnistes

On définit la traduction de Godël inductivement :

- si p est un atome différent de $\perp$, alors $p^o := \neg\neg p$;
- on pose $\perp^o := \perp$;
- $(\varphi \wedge \psi)^o := \varphi^o \wedge \psi^o$;
- $(\varphi \vee \psi)^o := \neg(\neg\varphi^o \wedge \neg\psi^o)$;
- $(\varphi \to \psi)^o := \varphi^o \to \psi^o$;
- $(\forall x \varphi(x))^o := \forall x \varphi^o(x)$;
- $(\exists x \varphi(x))^o := \neg\forall x \neg\varphi^o(x)$.

Si Γ est un ensemble de formules, on définit Γ^o comme l'ensemble des traductions de Godël des formules de Γ :

$$\Gamma^o := \{\varphi^o \mid \varphi \in \Gamma\}.$$

Théorème (de Godël)

Si Γ *est un ensemble de formules, et* φ *une formule, alors :*

$$\Gamma \vdash_c \varphi \Leftrightarrow \Gamma^o \vdash_i \varphi^o.$$

Théorème (de Godël)

Si Γ est un ensemble de formules, et φ une formule, alors :

$$\Gamma \vdash_c \varphi \Leftrightarrow \Gamma^o \vdash_i \varphi^o.$$

Théorème (de Glivenko)

Si φ est une formule propositionnelle, alors

$$\vdash_c \varphi \Leftrightarrow \vdash_i \neg\neg\varphi.$$

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;
- D est une fonction qui à chaque élément $k \in K$ associe un ensemble non vide $D(k)$;

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;
- D est une fonction qui à chaque élément $k \in K$ associe un ensemble non vide $D(k)$;
- Σ est une fonction sur K vérifiant $\Sigma(k) \subseteq Sent_k$, où $Sent_k$ est l'ensemble des formules de L avec pour constantes les éléments de $D(k)$.

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;
- D est une fonction qui à chaque élément $k \in K$ associe un ensemble non vide $D(k)$;
- Σ est une fonction sur K vérifiant $\Sigma(k) \subseteq Sent_k$, où $Sent_k$ est l'ensemble des formules de L avec pour constantes les éléments de $D(k)$.

On demande que les relations suivantes soient satisfaites :

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;
- D est une fonction qui à chaque élément $k \in K$ associe un ensemble non vide $D(k)$;
- Σ est une fonction sur K vérifiant $\Sigma(k) \subseteq Sent_k$, où $Sent_k$ est l'ensemble des formules de L avec pour constantes les éléments de $D(k)$.

On demande que les relations suivantes soient satisfaites :

(i) D et Σ sont croissantes, *i.e*

$$k \leqslant l \Rightarrow D(k) \subseteq D(l) \text{ and } \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l);$$

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke $\mathscr{K}$ est un triplet $< K, \Sigma, D >$, où :

- K est un ensemble non vide partiellement ordonné ;
- D est une fonction qui à chaque élément $k \in K$ associe un ensemble non vide $D(k)$;
- Σ est une fonction sur K vérifiant $\Sigma(k) \subseteq Sent_k$, où $Sent_k$ est l'ensemble des formules de L avec pour constantes les éléments de $D(k)$.

On demande que les relations suivantes soient satisfaites :

(i) D et Σ sont croissantes, *i.e*

$$k \leqslant l \Rightarrow D(k) \subseteq D(l) \text{ and } \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l);$$

(ii) $\perp \notin \Sigma(k)$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

(iii) $k \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow k$ pour tout $\ell \geqslant k$, $(\ell \Vdash \varphi$ implique $\ell \Vdash \psi)$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

(iii) $k \Vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow k$ pour tout $\ell \geqslant k$, $(\ell \Vdash \varphi$ implique $\ell \Vdash \psi)$

(iv) $k \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow$ il exist $a \in D(k)$ tel que $k \Vdash \varphi(a)$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

(iii) $k \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow k$ pour tout $\ell \geqslant k$, $(\ell \Vdash \varphi$ implique $\ell \Vdash \psi)$

(iv) $k \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow$ il exist $a \in D(k)$ tel que $k \Vdash \varphi(a)$

(v) $k \Vdash \forall x \varphi x \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, et tout $a \in D(\ell)$, $\ell \Vdash \varphi(a)$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

(iii) $k \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow k$ pour tout $\ell \geqslant k$, $(\ell \Vdash \varphi$ implique $\ell \Vdash \psi)$

(iv) $k \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow$ il exist $a \in D(k)$ tel que $k \Vdash \varphi(a)$

(v) $k \Vdash \forall x \varphi x \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, et tout $a \in D(\ell)$, $\ell \Vdash \varphi(a)$

(vi) $k \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, $\ell \nVdash \varphi$

La fonction Σ

La fonction Σ vérifie :

(i) $k \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ ou $k \Vdash \psi$

(ii) $k \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow k \Vdash \varphi$ et $k \Vdash \psi$

(iii) $k \Vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow k$ pour tout $\ell \geqslant k$, $(\ell \Vdash \varphi$ implique $\ell \Vdash \psi)$

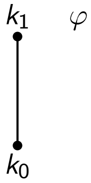
(iv) $k \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow$ il exist $a \in D(k)$ tel que $k \Vdash \varphi(a)$

(v) $k \Vdash \forall x \varphi x \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, et tout $a \in D(\ell)$, $\ell \Vdash \varphi(a)$

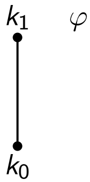
(vi) $k \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, $\ell \nVdash \varphi$

(vii) $k \Vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow$ pour tout $\ell \geqslant k$, il existe $p \geqslant \ell$ tel que $p \Vdash \varphi$

Exemples



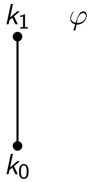
Exemples



k_0 ne force rien, et k_1 force φ. On a donc :

$$k_0 \nVdash \varphi \text{ et } k_1 \Vdash \varphi.$$

Exemples



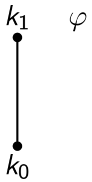
k_0 ne force rien, et k_1 force φ. On a donc :

$$k_0 \nVdash \varphi \text{ et } k_1 \Vdash \varphi.$$

On a donc, $k_0 \Vdash \neg\neg\varphi$, et donc il s'ensuit

$$k_0 \nVdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$$

Exemples



k_0 ne force rien, et k_1 force φ. On a donc :

$$k_0 \nVdash \varphi \text{ et } k_1 \Vdash \varphi.$$

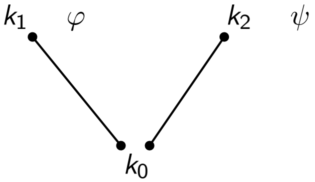
On a donc, $k_0 \Vdash \neg\neg\varphi$, et donc il s'ensuit

$$k_0 \nVdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$$

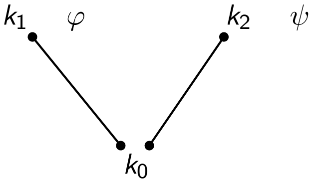
De plus, $k_1 \Vdash \varphi$, $k_0 \nVdash \neg\varphi$. Finalement,

$$k_0 \nVdash \varphi \vee \neg\varphi.$$

Exemples

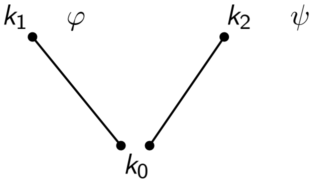


Exemples



Aucun k_i ne force $\varphi \wedge \psi$, et donc, $k_0 \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.

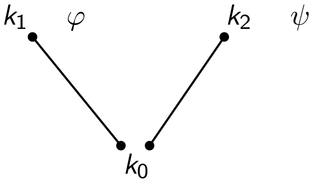
Exemples



Aucun k_i ne force $\varphi \land \psi$, et donc, $k_0 \Vdash \neg(\varphi \land \psi)$.

Maintenant, $k_1 \Vdash \varphi$ et donc $k_0 \nVdash \neg\varphi$, et $k_2 \Vdash \psi$ et donc $k_0 \nVdash \neg\psi$. Donc $k_0 \nVdash \neg\varphi \lor \neg\psi$.

Exemples



Aucun k_i ne force $\varphi \wedge \psi$, et donc, $k_0 \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Maintenant, $k_1 \Vdash \varphi$ et donc $k_0 \nVdash \neg\varphi$, et $k_2 \Vdash \psi$ et donc $k_0 \nVdash \neg\psi$. Donc $k_0 \nVdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Finalement :

$$k_0 \nVdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Complétude

Théorème (de complétude de Kripke)

Pour Γ *et* φ *fermés, on a :*

$$\Gamma \vdash_i \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi.$$

Complétude

Théorème (de complétude de Kripke)

Pour Γ et φ fermés, on a :

$$\Gamma \vdash_i \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi.$$

Proposition

En logique intuitionniste, il est impossible de définir les connecteurs $\vee, \wedge, \rightarrow, \perp$ les uns en fonction des autres.

Démonstration

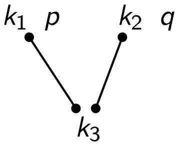
Faisons la démonstration par exemple pour $\vee$.

Démonstration

Faisons la démonstration par exemple pour $\vee$.

Supposons qu'il existe φ qui définit $\vee$ avec $\wedge, \bot, \to$.

Considérons le modèle de Kripke suivant :



Montrons le résultat suivant par induction sur la formule F :

Si F est une formule avec les atomes p et q, et ne contenant pas $\vee$, alors k_1 et k_2 forcent F si et seulement si k_3 force F.

Montrons le résultat suivant par induction sur la formule F :

Si F est une formule avec les atomes p et q, et ne contenant pas $\vee$, alors k_1 et k_2 forcent F si et seulement si k_3 force F.

Le sens réciproque est évident par monotonie de $\Vdash$.
regardons donc uniquement le sens direct.

- Si F est p,q ou $\perp$, le résultat est évident.

- Si F est p,q ou $\bot$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.

- Si F est p,q ou $\bot$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \to \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.

- Si F est p,q ou $\perp$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \rightarrow \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.
  Si ψ est forcé par k_1 et k_2, alors σ aussi, et donc par hypothèse d'induction, on a $k_3 \Vdash \psi \rightarrow \sigma$.

- Si F est p,q ou $\perp$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \rightarrow \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.
  Si ψ est forcé par k_1 et k_2, alors σ aussi, et donc par hypothèse d'induction, on a $k_3 \Vdash \psi \rightarrow \sigma$.
  Si ψ n'est forcé que par un monde, par exemple k_1, alors ψ n'est pas forcé par k_3 par hypothèse d'induction, et σ est forcé par k_1. On a donc $k_3 \Vdash \psi \rightarrow \sigma$.

- Si F est p,q ou $\perp$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \rightarrow \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.
  Si ψ est forcé par k_1 et k_2, alors σ aussi, et donc par hypothèse d'induction, on a $k_3 \Vdash \psi \rightarrow \sigma$.
  Si ψ n'est forcé que par un monde, par exemple k_1, alors ψ n'est pas forcé par k_3 par hypothèse d'induction, et σ est forcé par k_1. On a donc $k_3 \Vdash \psi \rightarrow \sigma$.
  Si ψ n'est forcé ni dans k_1 ni dans k_2, le résultat est évident.

- Si F est p,q ou $\bot$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \to \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.
  Si ψ est forcé par k_1 et k_2, alors σ aussi, et donc par hypothèse d'induction, on a $k_3 \Vdash \psi \to \sigma$.
  Si ψ n'est forcé que par un monde, par exemple k_1, alors ψ n'est pas forcé par k_3 par hypothèse d'induction, et σ est forcé par k_1. On a donc $k_3 \Vdash \psi \to \sigma$.
  Si ψ n'est forcé ni dans k_1 ni dans k_2, le résultat est évident.

- Si F est p,q ou $\bot$, le résultat est évident.
- Si F est $\psi \wedge \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$. Alors k_1 et k_2 forcent tous les deux ψ et σ, et donc k_3 force ψ et σ par hypothèse d'induction.
- Si F est $\psi \to \sigma$:
  Supposons $k_1 \Vdash F$ et $k_2 \Vdash F$, et $k_3 \nVdash F$.
  Si ψ est forcé par k_1 et k_2, alors σ aussi, et donc par hypothèse d'induction, on a $k_3 \Vdash \psi \to \sigma$.
  Si ψ n'est forcé que par un monde, par exemple k_1, alors ψ n'est pas forcé par k_3 par hypothèse d'induction, et σ est forcé par k_1. On a donc $k_3 \Vdash \psi \to \sigma$.
  Si ψ n'est forcé ni dans k_1 ni dans k_2, le résultat est évident.

On a donc le résultat voulu. En l'appliquant à notre formule φ, comme $k_1 \Vdash p \vee q$ et $k_2 \Vdash p \vee q$, on a $k_3 \Vdash p \vee q$, ce qui est faux.

Anne Sjerp TOELSTRA :
History of construtivism in the Twentieth Century.
1991.

Dirk VAN DALEN :
Intuitionistic Logic.
In The Blackwell guide to philosophical logic, chapitre 11. 2001.

Dirk VAN DALEN :
Intuitionistic Logic.
In Handbook of philosophical logic, volume 5, chapitre 1. 2nd édition, 2002.

Dirk VAN DALEN :
Logic and structures.
4th édition, 2004.

Joseph VIDAL-ROSSET :
L'argument de Russel-Tennant.
2005.

Vítěslav ŠVEJDAR :
On Sequent Calculi for Intuitionistic Propositional Logic.
2005.