Algèbres de Poisson

Kevin Quirin
Avec Pol Vanhaecke [1]

Mai-Juin 2010

1. Professeur de Mathématiques à l'Université de Poitiers

Table des matières

1 Introduction

« Il ne semblait pas que cette importante théorie pût encore être perfectionnée, lorsque les deux géomètres qui ont le plus contribué à la rendre complète en ont fait de nouveau le sujet de leurs méditations. [...] Les recherches que je soumets aujourd'hui à la classe, sont relatives à cette même théorie, que je reprends en entier sous un nouveau point de vue. »

C'est suite à ces mots que Siméon Denis Poisson (1781 – 1840) introduisit en 1809 dans le *Journal de l'École Polytechnique* sa célèbre parenthèse – devenue aujourd'hui crochet –, destinée à améliorer la mécanique Lagrangienne. Cette découverte toucha des domaines aussi différents que la mécanique, la physique quantique, la géométrie, l'algèbre, *etc.* Nous étudierons dans la suite les aspects plutôt algébriques des crochets de Poisson, bien qu'ils soient des objets essentiellement géométriques.

2 Définitions et premières propriétés

On se placera toujours sur un espace vectoriel $V = \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on notera $\mathscr{F}(V)$ soit $\mathscr{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, soit $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ (identifié aux *fonctions* polynomiales à n variables sur $\mathbb{K}$).

Définition 2.1 : Crochet de Poisson
On appelle crochet de Poisson *sur V toute application* $\{\cdot,\cdot\} : \mathscr{F}(V) \times \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V)$ *vérifiant :*

(i) $\{\cdot,\cdot\}$ *est bilinéaire.*

(ii) $\{\cdot,\cdot\}$ *est antisymétrique,* i.e. $\forall (f, g) \in \mathscr{F}(V)^2, \{f, g\} = -\{g, f\}$.

(iii) $\{\cdot,\cdot\}$ *est une bidérivation,* i.e. *vérifie l'identité de Leibniz en chacun de ses arguments :*

$$\forall (f, g, h) \in \mathscr{F}(V)^3, \quad \begin{array}{l} \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{h, f\} \\ \{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g \end{array}$$

(iv) $\{\cdot,\cdot\}$ *vérifie l'identité de Jacobi :*

$$\forall (f, g, h) \in \mathscr{F}(V)^3,\ \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

Remarque – *(i)*, *(ii)* et *(iv)* définissent un crochet de Lie sur $\mathscr{F}(V)$.

Exemples :

- Le crochet défini par $\{f, g\} = 0$ est un crochet de Poisson.
- Le crochet historique donné par Poisson était défini sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

  où $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ est un système de coordonnées linéaire sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2.2 : Algèbre de Poisson
Soient $\mathscr{A}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $\cdot$ *et* $\{\cdot,\cdot\}$ *deux applications bilinéaires sur* $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$*.* $\mathscr{A}$ *est une algèbre de Poisson si :*

(i) $\cdot$ *est associatif et commutatif.*

(ii) $\{\cdot,\cdot\}$ *est un crochet de Lie.*

(iii) $\cdot$ *et* $\{\cdot,\cdot\}$ *sont liés par* l'identité de Leibniz *:*

$$\forall u,v,w\in\mathscr{A},\ \{u\cdot v,w\}=u\cdot\{v,w\}+\{u,w\}\cdot v.$$

Remarque – Soit V un espace vectoriel. On note $\cdot$ le produit usuel de deux fonctions, et $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson sur V. Alors $(\mathscr{F}(V),\cdot,\{\cdot,\cdot\})$ est une algèbre de Poisson.

Définition 2.3 : Casimir
On appellera casimir *une fonction* f *vérifiant*

$$\forall g\in\mathscr{F}(V),\ \{f,g\}=0$$

et on notera $\mathrm{Cas}(V,\{\cdot,\cdot\})$ *l'ensemble des casimirs sur* V *muni du crochet de Poisson* $\{\cdot,\cdot\}$ *(ou simplement* $\mathrm{Cas}(V)$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté).*

Remarque – $\mathrm{Cas}(V,\{\cdot,\cdot\})$ est une algèbre pour $\{\cdot,\cdot\}$ et pour $\cdot$.

Définition 2.4 : Dérivation hamiltonienne
Soit $f\in\mathscr{F}(V)$*. On appellera* dérivation hamiltonienne associée à f *l'application*

$$X_f:\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(V)&\longrightarrow&\mathscr{F}(V)\\ g&\longmapsto&X_f[g]=\{g,f\}\end{array}$$

et on notera $\mathrm{Ham}(V,\{\cdot,\cdot\})$ *l'espace vectoriel des dérivations hamiltoniennes.*

Définition 2.5 : Dérivation hamiltonienne en un point
Soient $f\in\mathscr{F}(V)$ *et* $m\in V$*. On appellera* dérivation hamiltonienne associée à f en m *l'application*

$$X_f^m:\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(V)&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ g&\longmapsto&X_f[g](m)=\{g,f\}(m)\end{array}$$

et on notera $\mathrm{Ham}_m(V,\{\cdot,\cdot\})$ *l'espace vectoriel des dérivations hamiltoniennes en* m*.*

Exemple – Considérons une particule de masse m qui se déplace sur un axe. On repère la particule par son abcisse q, et on note p son moment $p=m\dot{q}$. Soit $H(q,p)$ l'hamiltonien du système. Les équations de la physique nous donnent

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Soit (q, p) une solution du système. Soit F une fonction dépendant de p et q, mais pas explicitement du temps. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \{F, H\}\end{aligned}$$

où $\{a, b\} = \dfrac{\partial a}{\partial q}\dfrac{\partial b}{\partial p} - \dfrac{\partial a}{\partial p}\dfrac{\partial b}{\partial q}$.

Ainsi, la dérivation hamiltonienne X_H est ici la dérivation par rapport au temps. On peut donc montrer le théorème de Poisson :

Si f et g sont deux constantes du mouvement, alors $\{f, g\}$ l'est aussi.

En effet

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\{f, g\}}{\mathrm{d}t} &= \{\{f, g\}, H\} \\ &= \{\{f, H\}, g\} - \{\{g, H\}f\} \quad \text{par identité de Jacobi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Définition 2.6 : Dérivation
On appelle dérivation *sur $\mathscr{F}(V)$ toute application linéaire $\alpha : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V)$ vérifiant :*

$$\forall f, g \in \mathscr{F}(V),\ \alpha(fg) = f\alpha(g) + g\alpha(f).$$

On appelle k-dérivation *toute application k-linéaire $\alpha : \mathscr{F}(V)^k \to \mathscr{F}(V)$ qui est une dérivation en chacune des coordonnées. On appellera* bidérivation, tridérivation, *etc. respectivement les 2-dérivations, 3-dérivations*, etc. *On travaillera souvent avec des k-dérivations antisymétriques*, i.e.

$$\forall f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{F}(V),\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \alpha(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(f_1, \ldots, f_k).$$

Exemples :

- La dérivée usuelle $f \mapsto f'$ est une dérivation, car $(fg)' = f'g + fg'$.

- Sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \times \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \\ (f,g) & \longmapsto & x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \end{array}$$

  est une bidérivation symétrique.

Théorème 2.7 : Caractérisation des dérivations
Les dérivations sur $\mathscr{F}(V)$ sont exactement les applications de la forme :

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \lambda_i \in \mathscr{F}(V).$$

Lemme 2.8 : d'Hadamard
Soit $f \in \mathscr{F}(V)$. Soit $x \in V$. Alors

$$\forall y \in V,\ \exists h_{i,y} \in \mathscr{F}(V),\ f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)h_{i,y}(x).$$

On remarque de plus que $h_{i,y}(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y)$.

Remarques :

- Les fonctions $h_{i,y}$ ne sont en général pas uniques.
- Si $\mathscr{F}(V) = \mathscr{C}^\infty(V)$, les $h_{i,y}$ sont aussi dans $\mathscr{C}^\infty(V)$, et si $\mathscr{F}(V) = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ les $h_{i,y}$ sont des polynômes.

Démonstration.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\frac{\partial f}{\partial t}(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 2.7. Soit α une dérivation.
On remarque tout d'abord que pour toute constante c, $\alpha(c) = 0$.

Soit $f \in \mathscr{F}(V)$. Soit $y \in V$.

$$\begin{aligned}
(\alpha(f))(y) &= (\alpha(f - f(y)))(y) \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{k}(p_i - y_i)h_{i,y}\right)(y) \quad \text{où } p_i \text{ est la projection canonique sur } x_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k}\alpha((p_i - y_i))h_{i,y}\right)(y) + \left(\sum_{i=1}^{k}(p_i - y_i)\alpha(h_{i,y})\right)(y) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha(p_i)(y)h_{i,y}(y) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha(p_i)(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y).
\end{aligned}$$

La réciproque est évidente. □

Corollaire 2.9 : Caractérisation des k-dérivations
Les k-dérivations de $\mathscr{F}(V)$ sont exactement les applications de la forme :

$$\alpha(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \lambda_{i_1,\ldots,i_k}\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_k}}\,, \qquad \lambda_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathscr{F}(V).$$

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées linéaire sur V,

$$\alpha(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_k}}.$$

En particulier, si α est une bidérivation antisymétrique

$$\alpha(f, g) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha(x_i, x_j)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

3 Crochets de Poisson en petite dimension

On se place dans cette section sur un espace vectoriel V de dimension finie n, muni d'un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. On notera x_i la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.

3.1 Cas de la dimension 1

Proposition 3.1
Si $\dim(V) = 1$, de système de coordonnées linéaire (x), tous les crochets de Poisson sur V sont nuls.

Démonstration. Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson sur V. Soient $f, g \in \mathscr{F}(V)$.

D'après le corollaire 2.9

$$\{f,g\} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{1} \{x_i, x_j\} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = 0.$$

□

3.2 Cas de la dimension 2

On se place ici sur un espace vectoriel V de dimension 2, avec un système de coordonnées linéaire (x, y).

Proposition 3.2
Les crochets de Poisson sont exactement de la forme

$$\{f,g\} = \varphi \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \varphi \in \mathscr{F}(V).$$

Démonstration. Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson.
Alors $\{\cdot,\cdot\}$ est une bidérivation antisymétrique, donc d'après le corollaire 2.9

$$\{f,g\} = \{x,y\} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right).$$

Réciproquement, un calcul direct permet de montrer que les crochets de cette forme sont des crochets de Poisson. □

Remarques :

- On a mis en évidence une bijection entre $\mathscr{F}(V)$ et l'ensemble des crochets de Poisson sur V.
- Les crochets de Poisson en dimension 2 sont entièrement déterminés par $\{x, y\}$.

Proposition 3.3
Soit $\{\cdot,\cdot\}$ défini par φ comme dans la proposition 3.2. Alors si les zéros de φ sont isolés (e.g. *si $\mathscr{F}(V) = \mathbb{K}[X,Y]$), alors les casimirs sont exactement les fonctions constantes.*

Démonstration. Les fonctions constantes sont clairement des casimirs.

Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Cas}(V)$.
Alors $\{f, x\} = -\frac{\partial f}{\partial y}\varphi = 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est nulle sur une partie dense de V, et donc est nulle sur V par continuité. De même, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle sur V. Donc f est constante. □

3.3 Cas de la dimension 3

On suppose maintenant $\dim(V) = 3$, et on se donne un système de coordonnées linéaire (x, y, z) sur V.

Proposition 3.4
Les crochets de Poisson sur V sont entièrement déterminés par $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ et $\{z, x\}$.

Démonstration. C'est un corollaire direct du corollaire 2.9. □

Remarque – De même, un crochet de Poisson en dimension n est entièrement déterminé par les $\{x_i, x_j\},\ i < j$. On a la formule

$$\{f, g\} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \{x_i, x_j\} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

On peut aussi montrer qu'une k-dérivation antisymétrique est entièrement déterminée par les $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, $x_{i_1} < \cdots < x_{i_k}$.

Exemple – Soient $\varphi, \chi \in \mathscr{F}(V)$. On pose

$$\forall f, g \in \mathscr{F}(V),\ \{f, g\}_{\chi,\varphi} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Montrons que ça définit un crochet de Poisson.

La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz découle directement des propriétés du déterminant et des dérivées partielles. Il nous suffit donc de montrer l'identité de Jacobi.

Posons

$$J(f, g, h) = \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}.$$

$J(f, g, h)$ s'appelle le *jacobiateur* de f,g et h. Il est clair que l'identité de Jacobi équivaut à la nullité de J.

Il est facile de vérifier que J est une tridérivation antisymétrique. J est donc entièrement déterminée par $J(x, y, z)$.

$\{y, z\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et donc $\{x, \{y, z\}\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \chi^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)$.

$\{x, y\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ et donc $\{z, \{x, y\}\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \chi^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right)$.

$\{z, x\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et donc $\{y, \{z, x\}\} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \chi^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right)$.

Finalement, le jacobiateur de x, y, z est nul, et donc $\{\cdot,\cdot\}_{\chi,\varphi}$ est bien un crochet de Poisson.

On remarque que φ est alors un casimir.

Exemple – On se place dans le cas $\mathscr{F}(V) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Montrons que tous les crochets de Poisson sur V ne sont pas de la forme $\{\cdot,\cdot\}_{\chi,\varphi}$. Considérons

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{x}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

On vérifie comme précedemment qu'on a bien un crochet de Poisson.

Supposons alors

$$\exists \varphi, \chi \in \mathscr{F}(V),\ \{\cdot,\cdot\} = \{\cdot,\cdot\}_{\chi,\varphi}.$$

Cherchons les casimirs de $\{\cdot,\cdot\}$. Soit $f \in \mathrm{Cas}(V)$.

Alors $\{f,x\} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, et $\{f,z\} = 0$ donc $\frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$. On se ramène donc à une fonction des deux variables x et y.

Soit le changement de variables

$$\alpha : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (u,v) = (x^2y, x) \end{array}$$

$\mathrm{Jac}(\alpha) = -x^2 \neq 0$ et α est injective, donc α est un difféomorphisme.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}2xy + \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}x^2y. \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$u\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{v}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = u\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, et donc $\exists G \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*\right),\ \forall u, v \in \left(\mathbb{R}_+^*\right),\ g(u,v) = G(u)$.

Finalement,

$$\exists G \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*),\ \forall x, y > 0,\ f(x,y) = G(x^2y).$$

En particulier, φ est un casimir, donc

$$\exists \psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*),\ \forall x, y > 0,\ \varphi(x,y) = \psi(x^2 y).$$

On a donc, comme $\chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$:

$$\chi(x,y,z) = \frac{1}{2x\psi'(x^2 y)}.$$

Or χ est continue en $(0,y,z)$, donc nécessairement :

$$\lim_{x \to 0} \psi'(x^2 y) = \infty.$$

Mais alors $\lim\limits_{y \to 0} \psi'(x^2 y) = \infty$, et donc

$$\forall a > 0,\ \chi(a,0,0) = 0.$$

On a donc

$$\forall f, g,\ \forall a > 0,\ \{f,g\}(a,0,0) = 0.$$

Or $\{z,x\} = \frac{x}{2}$, donc $\{z,x\}(a,0,0) = \frac{a}{2}$.

D'où une contradiction.

Proposition 3.5
Soit $\{\cdot,\cdot\}$ le crochet défini par

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & F \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & G \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & H \end{vmatrix} \quad , \quad F, G, H \in \mathscr{F}(V)$$

et soit $\vec{E} = (F,G,H)$. Alors $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson si et seulement si

$$\left\langle (\nabla \wedge \vec{E}), \vec{E} \right\rangle = 0. \tag{$\triangle$}$$

Démonstration. Ce crochet vérifie toujours la bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz. On a $F = \{y,z\}$, $G = \{z,x\}$ et $H = \{x,y\}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Jacobi} &\iff \{\{x,y\},z\} + \{\{z,x\},y\} + \{\{y,z\},x\} = 0 \\ &\iff \{H,z\} + \{G,y\} + \{F,x\} = 0 \\ &\iff F\frac{\partial H}{\partial y} - G\frac{\partial H}{\partial x} + H\frac{\partial G}{\partial x} - F\frac{\partial G}{\partial z} + G\frac{\partial F}{\partial z} - H\frac{\partial F}{\partial y} \\ &\iff F\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + H\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ &\iff \left\langle (\nabla \wedge \vec{E}), \vec{E} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

REMARQUE – ($\triangle$) associée aux relations de calculs vectoriels montre différentes propriétés :

– La relation $\nabla \wedge (\chi \vec{E}) = \chi \nabla \wedge \vec{E} + (\nabla \chi) \wedge \vec{E}$ nous donne :

Si $\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson sur V et $\chi \in \mathscr{F}(V)$, alors $\chi\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson.

– La relation $\nabla \wedge (\nabla \varphi) = 0$ nous donne :

$$\text{Si } \exists \varphi \in \mathscr{F}(V),\ \vec{E} = \nabla \varphi, \text{ alors } \{\cdot, \cdot\} \text{ est un crochet de Poisson.}$$

Ces deux propriétés permettent de redémontrer que $\{\cdot, \cdot\}_{\chi,\varphi}$ est un crochet de Poisson.

4 Crochets de Nambu-Poisson

Définition 4.1 : Crochet de Nambu-Poisson
Un crochet de Nambu-Poisson *d'ordre k sur V est une k-dérivation antisymétrique qui vérifie l'identité fondamentale*

$$\begin{gathered} \forall F_1, \ldots, F_{k-1}, G_1, \ldots, G_k \in \mathscr{F}(V), \\ \{F_1, \ldots, F_{k-1}, \{G_1, \ldots, G_k\}\} = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \{G_1, \ldots, G_{i-1}, \{F_1, \ldots, F_{k-1}, G_i\}, G_{i+1}, \ldots, G_k\} \end{gathered} \tag{IF}$$

REMARQUE – (IF) pour $k = 2$ est exactement l'identité de Jacobi. On peut donc identifier les crochets de Nambu-Poisson d'ordre 2 et les crochets de Poisson. Les crochets de Nambu-Poisson sont donc une généralisation des crochets de Poisson.

Proposition 4.2 : De Nambu-Poisson à Poisson
Soient $\{\cdot, \ldots, \cdot\}$ un crochet de Nambu-Poisson d'ordre k sur V et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}$ des fonctions de $\mathscr{F}(V)$. Alors $(f, g) \mapsto \{f, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} = \{f, g\}_{(\varphi_i)}$ définit un crochet de Poisson sur V.

Démonstration. La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz découlent directement de la définition d'un crochet de Nambu-Poisson. Il ne reste donc qu'à montrer l'identité de Jacobi.

Soient $(f, g, h) \in \mathscr{F}(V)$.

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}_{(\varphi_i)}, h\}_{(\varphi_i)} &= \{\{f, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\}, h, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} \\ &= (-1)^{k-1}\{h, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\{f, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\}\} \quad \text{par antisymétrie} \\ &= (-1)^{k-1}\{\{h, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}, f\}, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} \\ &\quad + (-1)^{k-1}\{f, \{h, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}, g\}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} \quad \text{par (IF) et antisymétrie} \\ &= (-1)^{k-1}\{(-1)^{k-2}\{h, f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\}, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} \\ &\quad + (-1)^{k-1}\{f, (-1)^{k-1}\{g, h, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} \\ &= -\{\{h, f\}_{(\varphi_i)}, g\}_{(\varphi_i)} - \{\{g, h\}_{(\varphi_i)}, f\}_{(\varphi_i)}. \end{aligned}$$

Finalement,
$$\{\{f,g\}_{(\varphi_i)},h\}_{(\varphi_i)}+\{\{h,f\}_{(\varphi_i)},g\}_{(\varphi_i)}+\{\{g,h\}_{(\varphi_i)},f\}_{(\varphi_i)}=0.$$
□

Proposition 4.3
Le crochet sur V de dimension $n \geqslant 3$ défini par
$$\{F_1,\ldots,F_n\}=\chi\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\qquad\qquad \chi\in\mathscr{F}(V)$$
est un crochet de Nambu-Poisson d'ordre n.

Démonstration. $\{\cdot,\ldots,\cdot\}$ est clairement une n-dérivation antisymétrique, il suffit donc de montrer (IF).

Soit $N:\mathscr{F}(V)^{2n-1}\to\mathscr{F}(V)$ définie par
$$\begin{aligned}N(F_1,\ldots,F_{n-1},G_1,\ldots,G_n)&=\{F_1,\ldots,F_{n-1},\{G_1,\ldots,G_n\}\}\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\{G_1,\ldots,G_{i-1},\{F_1,\ldots,F_{n-1},G_i\},G_{i+1},\ldots,G_n\}.\end{aligned}$$

Alors (IF) est équivalente à la nullité de N.

Soient $F_1,\ldots,F_{n-1}\in\mathscr{F}(V)$.

Alors $(G_1,\ldots,G_n)\mapsto N(F_1,\ldots,F_{n-1},G_1,\ldots,G_n)$ est une n-dérivation antisymétrique en dimension n, et est donc entièrement déterminée par sa valeur en $(x_1,\ldots,x_n)$.

Comme $\chi=\{x_1,\ldots,x_n\}$, la nullité de N va s'écrire :
$$\{F_1,\ldots,F_{n-1},\chi\}=\chi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\{F_1,\ldots,F_{n-1},x_i\}$$

$$\begin{aligned}\{F_1,\ldots,F_{n-1},\chi\}&=\chi\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \chi}{\partial x_n}\end{vmatrix}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\{F_1,\ldots,F_{n-1},x_i\}\\&=\chi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\{F_1,\ldots,F_{n-1},x_i\}-\chi^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & 1\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0\end{vmatrix}\ (i)\end{aligned}$$

Montrons donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} (i) \; = 0 \qquad (\star)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} (i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} (i)$$

En remarquant que

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} (i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} (i)$$

et en développant chaque terme de la somme par rapport à la k-ième colonne, une récurrence sur d permet de montrer $(\star)$, le cas $n = 3$ étant facilement vérifiable (*c.f.* annexe A). $\square$

Corollaire 4.4
Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \chi \in \mathscr{F}(V)$. Alors le crochet défini par

$$\{F, G\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est un crochet de Poisson sur V.
De plus, les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ sont des casimirs de $\{\cdot, \cdot\}$.

Ce corollaire nous donne donc une infinité d'exemples de crochets de Poisson, en toute dimension.

5 Rang d'une structure de Poisson

5.1 Définitions

Définition 5.1 : Matrice de Poisson
Soit $\{\cdot, \cdot\}$ un crochet de Poisson sur V. Soit $m \in V$.

On appelle matrice de Poisson *associée à* $\{\cdot,\cdot\}$ *la matrice* $(\{x_i,x_j\})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *On la notera* $\mathrm{mat}_{\text{🐟}}(\{\cdot,\cdot\})$ *(ou simplement* $\mathrm{mat}_{\text{🐟}}$*).*

On appelle matrice de Poisson *au point* m *associée à* $\{\cdot,\cdot\}$ *la matrice* $(\{x_i,x_j\}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *On la notera* $\mathrm{mat}^m_{\text{🐟}}(\{\cdot,\cdot\})$ *(ou simplement* $\mathrm{mat}^m_{\text{🐟}}$*).*

Notation – On notera dans la suite, si $(x_1,\ldots,x_n)$ est un système de coordonnées linéaires sur V,

$$\forall f\in\mathscr{F}(V),\ \nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Proposition 5.2

$$\forall f,g\in\mathscr{F}(V),\ \{f,g\}=(\nabla f)\cdot\mathrm{mat}_{\text{🐟}}\cdot{}^t(\nabla g).$$

Démonstration. On sait que

$$\{f,g\}=\sum_{i,j}\{x_i,x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

D'où le résultat par calcul direct de $(\nabla f)\cdot\mathrm{mat}_{\text{🐟}}\cdot{}^t(\nabla g)$. □

Définition 5.3 : Rang
On appelle rang *de* $\{\cdot,\cdot\}$ *au point* m *le rang de* $\mathrm{mat}^m_{\text{🐟}}(\{\cdot,\cdot\})$. *On le note* $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$.

On appelle rang *de* $\{\cdot,\cdot\}$ *l'entier* $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})=\max_{m\in V}\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$.

Remarques :

- Les matrices de Poisson associées aux points m sont antisymétriques, donc leurs rangs sont toujours pairs. Ainsi, pour tout crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$, $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$ est pair.
- D'après la proposition 5.2, un crochet de Poisson est entièrement déterminé par sa matrice de Poisson.
  Réciproquement, étant donné une matrice de fonctions antisymétrique, il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour montrer que c'est une matrice de Poisson.

Définition 5.4 : Les ensembles V_s
On pose $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})=2r$, *et on définit les ensembles* V_s *pour* $s\leqslant r$ *par*

$$V_s=\{m\in V\mid \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})\leqslant 2s\}.$$

– *Si* $m\in V_{r-1}$, *on dira que* m *est un* point singulier*.*
– *Si* $V_{r-1}=\emptyset$, *on dit que* $\{\cdot,\cdot\}$ *est* régulier*.*

– *Si* $V_0 = V$, *on dit que que* $\{\cdot,\cdot\}$ *est* trivial.

Remarque – Par définition du rang, si $s < r$,

$$V_s = \{m \in V \mid \text{les mineurs d'ordre } 2s+1 \text{ de la matrice de Poisson en } m \text{ sont nuls}\}.$$

Remarque – On a clairement $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_r$.

Exemples :

- $V_r = V$.
- $V_0 = \{m \in V \mid \forall i,j,\ \{x_i, x_j\}(m) = 0\}$.
- $V_r \backslash V_{r-1} = \{m \in V \mid \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})\}$.

Exemples :

- Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson en dimension 2. On a vu (proposition 3.2) que

$$\exists \varphi \in \mathscr{F}(V),\ \mathrm{mat}_{\text{🐟}}(\{\cdot,\cdot\}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

  Deux cas se présentent :

  1. φ ne s'annule jamais. Alors $\{\cdot,\cdot\}$ est régulier, de rang égal à 2.
  2. φ s'annule. Alors

$$\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } \varphi(m) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \varphi(m) = 0 \end{cases}$$

  Finalement, si $\varphi \neq 0$, alors $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 2$, et sinon $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 0$.

- Soit $\{\cdot,\cdot\}$ sur V de dimension 3 défini par

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{x}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

  La matrice de Poisson associée est

$$\mathrm{mat}_{\text{🐟}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & y \\ \frac{x}{2} & -y & 0 \end{bmatrix}$$

  Pour tout point $m = (a,b,c)$, on a

$$\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } (a,b) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (a,b) = (0,0) \end{cases}$$

  On a donc $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 2$.
  On a $V_1 = \mathbb{R}^3$ et V_0 est la droite vectorielle engendrée par $(0,0,1)$.

5.2 Un exemple d'étude

Soit $\{\cdot,\cdot\}$ le crochet sur V de dimension 4 défini par sa matrice de Poisson

$$\mathrm{mat}_{\text{🐟}} = \begin{bmatrix} 0 & b_1x_3x_4 & b_2x_2x_4 & b_3x_2x_3 \\ -b_1x_3x_4 & 0 & a_3x_1x_4 & a_2x_1x_3 \\ -b_2x_2x_4 & -a_3x_1x_4 & 0 & a_1x_1x_2 \\ -b_3x_2x_3 & -a_2x_1x_3 & -a_1x_1x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

où $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$.

Cherchons $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ tels que $\{\cdot,\cdot\}$ soit un crochet de Poisson, *i.e.* tels que l'identité de Jacobi soit vérifiée.
Il suffit de la vérifier pour x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\begin{aligned} \{x_1,\{x_2,x_3\}\} &= a_3\{x_1,x_1x_4\} && \text{par bilinéarité} \\ &= a_3x_1\{x_1,x_4\} && \text{par Leibniz} \\ &= a_3b_3x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x_3,\{x_1,x_2\}\} &= b_1\{x_3,x_3x_4\} \\ &= a_1b_1x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

$$\{x_2,\{x_3,x_1\}\} = -a_2b_2x_1x_2x_3.$$

Finalement, la condition devient

$$a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \qquad (\diamondsuit)$$

Le calcul des trois autres jacobiateurs donne la même condition. On suppose donc à partir de maintenant que $(\diamondsuit)$ est vérifiée.

Calculons le rang de $\{\cdot,\cdot\}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{mat}_{\text{🐟}}) &= x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= 0 \quad \text{d'après } (\diamondsuit). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) \neq 4$, et donc $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 0$ ou 2.

Donc si $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = 0$, $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 0$, et sinon $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = 2$.

5.3 Propriétés

Proposition 5.5
Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson. Soit $m \in V$. Alors

$$\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \dim(\mathrm{Ham}_m(V)).$$

Démonstration. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(\mathrm{mat}^m_{\twoheadrightarrow}) & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot x) \end{array}$$

Montrons que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

φ étant clairement une application linéaire, il suffit de montrer la bijectivité.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\forall f \in \mathscr{F}(V),\ (\nabla f)(m) \cdot x = 0$. C'est en particulier vrai pour $f = x_i$, et donc $x = 0$. Donc φ est injective.

Soit $\psi \in \mathrm{Ham}_m(V)$. Alors $\exists f \in \mathscr{F}(V),\ \psi = \chi_f(\cdot)(m)$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathscr{F}(V),\ \psi(g) &= \{g, f\}(m) \\ &= (\nabla g)(m) \cdot \mathrm{mat}^m_{\twoheadrightarrow} \cdot {}^t(\nabla f)(m) \quad \text{d'après la proposition 5.2} \\ &= \varphi(\mathrm{mat}^m_{\twoheadrightarrow} \cdot {}^t(\nabla f)(m)). \end{aligned}$$

Donc φ est surjective.

Finalement, φ est bijective, et donc $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{mat}^m_{\twoheadrightarrow})) = \dim(\mathrm{Ham}_m(V))$. □

Théorème 5.6
Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson de rang $2r$ sur V de dimension n. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ des casimirs tels que

$$\exists m \in V_r \backslash V_{r-1},\ (\nabla\varphi_1(m), \ldots, \nabla\varphi_s(m)) \textit{ est libre.}$$

Alors

$$2r \leqslant n - s.$$

Démonstration. Soit la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot \mathrm{mat}^m_{\twoheadrightarrow} \cdot x) \end{array}$$

Par théorème du rang, on a

$$n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Rk}(\varphi)$$

D'après la proposition 5.5, $\mathrm{Rk}(\varphi) = \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = 2r$. De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, $\varphi(\nabla\varphi_i(m)) = 0$ et $(\nabla\varphi_1(m), \ldots, \nabla\varphi_s(m))$ est libre, donc $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) \geqslant s$. □

Remarque – Le théorème 5.6 nous permet donc de réduire le nombre de valeurs possibles pour le rang d'un crochet de Poisson.

Exemple – Reprenons l'exemple d'une structure de Poisson quadratique (*cf.* exemple 5.2).

Alors la fonction $a_1x_2^2 - a_2x_3^2 + a_3x_4^2$ est un casimir (de gradient non nul) de $\{\cdot,\cdot\}$, et donc

$$\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) \leqslant 4 - 1$$

Les seules valeurs possibles sont donc 0 ou 2, et donc on retrouve bien le résultat énoncé plus haut.

Proposition 5.7
Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \chi \in \mathscr{F}(V)$. Alors le crochet défini par

$$\{F, G\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est de rang 0 ou 2.

Démonstration. D'après le corollaire 4.4, on a bien un crochet de Poisson, et les φ_i sont des casimirs. Soit $2r = \mathrm{Rk}(\{\cdot, \cdot\})$. Si $\chi = 0$, $r = 0$. Sinon, deux cas se présentent :

1. $\exists m \in V_r \backslash V_{r-1},\ (\nabla \varphi_i(m))_{1 \leqslant i \leqslant n-2}$ est libre. On peut dans ce cas appliquer directement le théorème 5.6, et donc le rang vaut 0 ou 2.
2. $\forall m \in V_r \backslash V_{r-1},\ (\nabla \varphi_i(m))_{1 \leqslant i \leqslant n-2}$ est liée. Dans ce cas, le déterminant est nul pour tout $m \in V_r \backslash V_{r-1}$, et donc le rang vaut 0.

□

6 Crochets de Poisson polynomiaux

On se place dans cette section sur un espace vectoriel V, muni d'un système de coordonnées linéaires $(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition 6.1 : Crochet polynomial
Un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ est polynomial si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \{x_i, x_j\} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Si de plus les $\{x_i, x_j\}$ ne contiennent que des termes de degré k, on dit que $\{\cdot, \cdot\}$ est homogène de degré k (on parle en particulier de crochet constant, linéaire, quadratique, etc. *).*

On sera ammenés à parler dans cette section *d'égalité à isomorphisme près*. Définissons donc la notion *isomorphisme*.

Définition 6.2 : Morphisme de Poisson
Soient $(\mathscr{A}_1, \cdot_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ et $(\mathscr{A}_2, \cdot_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ deux algèbres de Poisson, et φ une application linéaire de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$. φ est un morphisme de Poisson *si pour tous f et g de $\mathscr{A}_1$*

(i) $\varphi(f \cdot_1 g) = \varphi(f) \cdot_2 \varphi(g)$

(ii) $\varphi(\{f, g\}_1) = \{\varphi(f), \varphi(g)\}_2$

Si de plus, φ est bijective, alors φ est un isomorphisme de Poisson.

Proposition 6.3
Soient $\{\cdot, \cdot\}_1$ et $\{\cdot, \cdot\}_2$ deux crochets de Poisson sur deux espaces vectoriels V_1 et V_2 de même dimension finie. Soit h un difféomorphisme de V_1 dans V_2. Alors on a équivalence entre les propositions

(i) $f \mapsto f \circ h$ *est un isomorphisme de Poisson.*

(ii) $\forall f, g \in \mathscr{F}(V_2),\ \{f,g\}_2 \circ h = \{f \circ h, g \circ h\}_1$.

$(V_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ *et* $(V_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ *seront dit* isomorphes *si il existe un difféomorphisme vérifiant (i) ou (ii).*

Exemple – Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson sur $\mathbb{K}^2$ défini par $\{x,y\} = \varphi$, où φ vérifie

$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(a,b) = -\varphi(b,a).$$

Alors

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

est un isomorphisme de Poisson.

En effet, si $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{K}^2)$,

$$\begin{aligned} \{f \circ h, g \circ h\}(a,b) &= \varphi\left(\frac{\partial f \circ h}{\partial x}(a,b)\frac{\partial g \circ h}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial f \circ h}{\partial y}(a,b)\frac{\partial g \circ h}{\partial x}(a,b)\right) \\ &= \varphi(a,b)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(b,a)\frac{\partial g}{\partial x}(b,a) - \frac{\partial f}{\partial x}(b,a)\frac{\partial g}{\partial y}(b,a)\right) \\ &= -\varphi(b,a)\left(-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(b,a)\frac{\partial g}{\partial y}(b,a) - \frac{\partial f}{\partial y}(b,a)\frac{\partial g}{\partial x}(b,a)\right)\right) \\ &= \{f,g\} \circ h(a,b). \end{aligned}$$

6.1 Les crochets constants

Proposition 6.4
N'importe quelle matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *antisymétrique est la matrice de Poisson d'un crochet constant.*

Démonstration. L'identité de Jacobi est évidente puisque tous les $\{x_i, \{x_j, x_k\}\}$ sont nuls. □

Pour tout $m \in V$, la matrice de Poisson et la matrice de Poisson en m sont égales (quitte à identifier les scalaires et les fonctions constantes). Les crochets constants sont donc des exemples de crochets de Poisson réguliers, *i.e.*

$$\forall m \in V,\ \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}).$$

6.2 Les crochets linéaires

Théorème 6.5 : Bijection algèbres de Lie – crochets de Poisson linéaires
Il existe une bijection entre les algèbres de Lie de dimension finie sur V^* *et les crochets de Poisson linéaires sur* V.

Démonstration. Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson sur V. Alors $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]) = \left(V^*, \{\cdot,\cdot\}|_{V^*\times V^*}\right)$ est une algèbre de Lie.

Réciproquement, soit $(V^*,[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie, de base $(e_1,\dots,e_n)$. Pour tout $u \in V^*$, on note

$$u^* : \begin{array}{ccc} (V^*)^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \xi & \longmapsto & \xi(u) \end{array}$$

On pose

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = e_i^*.$$

Comme $(V^*)^*$ est isomorphe à V, les x_i sont bien des éléments de V^*, et forment donc un système de coordonnées sur V.

On définit $\{\cdot,\cdot\}$ par

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \{x_i,x_j\} = [e_i,e_j]^*.$$

Alors $(\{x_i,x_j\})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice antisymétrique (par antisymétrie de $[\cdot,\cdot]$), et le crochet ainsi défini vérifie l'identité de Jacobi, car $[\cdot,\cdot]$ la vérifie.

Si $[e_i,e_j] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}^k e_k$, alors $\{x_i,x_j\} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}^k x_k$, et donc le crochet est linéaire. □

Remarques :

- Le crochet de Poisson ainsi défini est appelé *crochet de Lie-Poisson.*

- Ce théorème nous montre donc que l'étude des crochets linéaires peut se ramener à l'étude des algèbres de Lie.

Exemple – Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (*i.e.* l'ensemble des matrices carrées 2×2 de traces nulles, muni du crochet $[A,B] = AB - BA$). Une base de $\mathfrak{g}$ est

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2Y. \end{aligned}$$

De même, $[X,Z] = -2Z$, $[Y,Z] = X$.

Le crochet de Poisson linéaire associé à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est défini par la matrice de Poisson

$$\mathrm{mat}_{\Rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2z \\ -2y & 0 & x \\ 2z & -x & 0 \end{pmatrix}$$

6.3 Les crochets quadratiques

Exemple – Regardons des exemples d'isomorphismes entre des crochets homogènes quadratiques en dimension 2. Soit $\{\cdot,\cdot\}_\varphi$ le crochet de Poisson quadratique défini par la matrice de Poisson

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

– Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi_1(x,y) = \alpha x^2$ et $\varphi_2(x,y) = \alpha y^2$, alors $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}$ et $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}$ sont isomorphes. En effet : soit

$$h : \begin{array}{ccc} (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}) & \longrightarrow & (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}) \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,x) \end{array}$$

Soient f et g dans $\mathscr{F}(V)$.

$$\begin{aligned}\{f\circ h, g\circ h\}_{ax^2}(x,y) &= ax^2\left(\frac{\partial f\circ h}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g\circ h}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f\circ h}{\partial y}(x,y)\frac{\partial g\circ h}{\partial x}(x,y)\right)\\ &= ax^2\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(-y,x)\frac{\partial g}{\partial x}(-y,x) + \frac{\partial f}{\partial x}(-y,x)\frac{\partial g}{\partial y}(-y,x)\right)\\ &= \{f,g\}_{ay^2}(-y,x)\\ &= \{f,g\}_{ay^2}\circ h(x,y).\end{aligned}$$

– Si $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi_1(x,y) = \alpha xy + \beta y^2$ et $\varphi_2(x,y) = \alpha xy$, alors $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}$ et $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}$ sont isomorphes, par l'isomorphisme

$$h : \begin{array}{ccc} (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}) & \longrightarrow & (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}) \\ (x,y) & \longmapsto & (\alpha x + \beta y, y) \end{array}$$

– Si $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi_1(x,y) = \alpha xy + \beta x^2$ et $\varphi_2(x,y) = \alpha xy$, alors $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}$ et $\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}$ sont isomorphes, par l'isomorphisme

$$h : \begin{array}{ccc} (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_1}) & \longrightarrow & (V,\{\cdot,\cdot\}_{\varphi_2}) \\ (x,y) & \longmapsto & (x, \beta x + \alpha y) \end{array}$$

Définition 6.6 : Crochet quadratique diagonal – diagonalisable
Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson quadratique sur V. On dit que $\{\cdot,\cdot\}$ est diagonal *si il existe des scalaires $a_{i,j}$ tels que*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\{\cdot,\cdot\}) = (a_{i,j}x_ix_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

c'est à dire

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \{x_i,x_j\} = a_{i,j}x_ix_j.$$

On dit que $\{\cdot,\cdot\}$ est diagonalisable s'il est isomorphe à un crochet quadratique diagonal. Avec les notations précédentes, $(x_1,\dots,x_n)$ est appelé système de coordonnées adapté *et la matrice antisymétrique $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est appelée* expression diagonale relative à $(x_1,\dots,x_n)$.

Exemple – Soit $\{\cdot,\cdot\}$ dans $\mathbb{K}^3$ défini par les crochets

$$\begin{aligned}\{x,y\} &= x^2+2y^2-3z^2-3xy+yz+2xz,\\ \{y,z\} &= -3x^2+z^2+3xy-yz+2xz,\\ \{z,x\} &= -3y^2+2z^2+3xy+yz-2xz.\end{aligned}$$

$\{\cdot,\cdot\}$ est bien un crochet de Poisson quadratique (on peut utiliser la proposition 3.5 pour s'en convaincre). Montrons que $\{\cdot,\cdot\}$ est diagonalisable.

Soit

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+y-z, -x+y+z) \end{array}$$

Soit f et g dans $\mathscr{F}(V)$. Le calcul présenté en annexe B nous donne :

$$\begin{aligned}\{f\circ h, g\circ h\} = 2\left(\{x,y\}+\{z,x\}\right)&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ h\frac{\partial g}{\partial y}\circ h - \frac{\partial f}{\partial y}\circ h\frac{\partial g}{\partial x}\circ h\right)\\ +2\left(\{x,y\}+\{y,z\}\right)&\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ h\frac{\partial g}{\partial z}\circ h - \frac{\partial f}{\partial z}\circ h\frac{\partial g}{\partial y}\circ h\right)\\ +2\left(\{y,z\}+\{z,x\}\right)&\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ h\frac{\partial g}{\partial x}\circ h - \frac{\partial f}{\partial x}\circ h\frac{\partial g}{\partial z}\circ h\right).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}2\left(\{x,y\}+\{z,x\}\right) &= 2(x-y+z)(x+y-z),\\ 2\left(\{x,y\}+\{y,z\}\right) &= 4(x+y-z)(-x+y+z),\\ 2\left(\{y,z\}+\{z,x\}\right) &= 6(x-y+z)(-x+y+z).\end{aligned}$$

Finalement, $\{f\circ h, g\circ h\} = \{f,g\}'\circ h$ où $\{\cdot,\cdot\}'$ est défini par sa matrice de Poisson

$$\begin{pmatrix} 0 & 2xy & -6xz \\ -2xy & 0 & 4yz \\ 6xz & -4yz & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\{\cdot,\cdot\}$ est diagonalisable, $(x-y+z, x+y-z, -x+y+z)$ est un système de coordonnées adapté et l'expression diagonale de $\{\cdot,\cdot\}$ par rapport à $(x-y+z, x+y-z, -x+y+z)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.7 : Crochets de Poisson diagonaux
Soit $M = (a_{i,j}x_ix_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, *avec* $a_{i,j} = -a_{j,i}$ *pour tous* i *et* j.

Alors M *est une matrice de Poisson.*

Démonstration. Vérifions l'identité de Jacobi. Soit $i,j,k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\{x_i,\{x_j,x_k\}\} &= \{x_i, a_{j,k}x_jx_k\}\\ &= a_{j,k}\{x_i,x_j\}x_k + a_{j,k}\{x_i,x_k\}x_j\\ &= x_ix_jx_k(a_{j,k}a_{i,j} - a_{j,k}a_{k,i}).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{gathered}\{x_k, \{x_i, x_j\}\} = x_i x_j x_k (a_{i,j} a_{k,i} - a_{i,j} a_{j,k}) \\ \text{et} \\ \{x_j, \{x_k, x_i\}\} = x_i x_j x_k (a_{k,i} a_{j,k} - a_{k,i} a_{i,j}).\end{gathered}$$

Finalement, le jacobiateur de x_i, x_j, x_k est nul, et donc M est bien une matrice de Poisson. $\square$

Annexes

A Récurrence de la proposition 4.3

La notation $\widehat{x}$ signifiera que x est omis. De même, $\widehat{(l)}$ signifiera qu'on supprime la ligne l d'une matrice.

Soit P_n la propriété « Pour toute algèbre de Poisson de dimension n, pour toutes $F_1, \dots, F_{n-1} \in \mathscr{F}(V)$, on a $(\star)$ ».

Montrons P_n pour tout $n \geqslant 3$ par récurrence sur n.

P_3 est facile à vérifier.

Soit $n \geqslant 4$, et supposons P_{n-1}. Alors

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}(i)$$

$$= (n-2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}(i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}(i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \widehat{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \widehat{\frac{\partial F_k}{\partial x_n}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}(i), \widehat{(l)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \widehat{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \widehat{\frac{\partial F_k}{\partial x_n}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}(i), \widehat{(l)}}_{:= A_{k,l}}$$

$$= 0 \quad \text{car les } A_{k,l} \text{ sont tous nuls par hypothèse de récurrence}$$

D'où P_n. On a donc montré par récurrence $\forall n \geqslant 3,\ P_n$.

B Diagonalisation du crochet quadratique

Pour simplifier les calculs, on notera P_q la fonction $\frac{\partial P}{\partial q} \circ h$ pour $q = x, y, z$ et $P = f, g$. On notera de plus $\wedge$ l'opérateur bilinéaire antisymétrique défini par $\frac{\partial a}{\partial i} \wedge \frac{\partial b}{\partial j} = \frac{\partial a}{\partial i}\frac{\partial b}{\partial j} - \frac{\partial b}{\partial i}\frac{\partial a}{\partial j}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \{f \circ h, g \circ h\} = \{x, y\} &\left(\frac{\partial f \circ h}{\partial x} \wedge \frac{\partial g \circ h}{\partial y}\right) \\ + \{y, z\} &\left(\frac{\partial f \circ h}{\partial y} \wedge \frac{\partial g \circ h}{\partial z}\right) \\ + \{z, x\} &\left(\frac{\partial f \circ h}{\partial z} \wedge \frac{\partial g \circ h}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Or, pour $P = f, g$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P \circ h}{\partial x} &= P_x + P_y - P_z \\ \frac{\partial P \circ h}{\partial y} &= -P_x + P_y + P_z \\ \frac{\partial P \circ h}{\partial z} &= P_x - P_y + P_z \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \{f \circ h, g \circ h\} &= \{x, y\}((f_x + f_y - f_z) \wedge (-g_x + g_y + g_z)) \\ &\quad + \{y, z\}((-f_x + f_y + f_z) \wedge (g_x - g_y + g_z)) \\ &\quad + \{z, x\}((f_x - f_y + f_z) \wedge (g_x + g_y - g_z)) \\ \\ &= \{x, y\}(2f_x \wedge g_y + 2f_y \wedge g_z) \\ &\quad + \{y, z\}(2f_z \wedge f_x + 2f_y \wedge f_z) \\ &\quad + \{z, x\}(2f_x \wedge g_y + 2f_z \wedge g_x) \\ \\ &= 2(\{x, y\} + \{z, x\})f_x \wedge g_y \\ &\quad + 2(\{x, y\} + \{y, z\})f_y \wedge g_z \\ &\quad + 2(\{y, z\} + \{z, x\})f_z \wedge g_x \end{aligned}$$

D'où le résultat recherché en utilisant les notations introduites plus haut.

Références

- Khaoula BEN ADBELJELIL : *L'intégrabilité des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2010.
- Jean-Paul DUFOUR et Nguyen TIEN ZUNG : *Poisson Structure and Their Normal Forms*. Birkhäuser, 1972.
- Jean-Paul DUFOUR et Aissa WADE : Formes normales de structures de Poisson ayant un 1-jet nul en un point. 1997.
- James E. HUMPHREY : *Introduction to Lie Algebra and Representation Theory*. Springer, 1972.
- Jacques LAFONTAINE : *Introduction aux variétés différentielles*. Edp Sciences, 1996.
- Pol VANHAECKE : *Integrable Systems in the realm of Algebraic Geometry*. Springer, 2001.
- Pol VANHAECKE, Camille LAURENT-GENGOUX et Anne PICHEREAU : *An invitation to Poisson structures*. 2010.