1 Questions de cours

1. Énoncer et montrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Énoncer et montrer le théorème d'intégration de développements limités.
3. Énoncer et montrer la formule de Taylor-Young.

2 Applications

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de
$$(1+x)^{1/x}.$$
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de
$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right).$$

3 Exercices

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, positive. Donner une CNS pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note $M_i = \sup\left|f^{(i)}\right|$. Montrer l'*inégalité de Kolmogorov*
$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$
4. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g : x \mapsto f(x)/x$ se prolonge en une application $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tous $0 \leqslant \ell \leqslant n$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(1)^{n-k}k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$
(on pourra utiliser la fonction $(e^x - 1)^n$).
6. Déterminer le DL à l'ordre 1000 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le DL à l'ordre $2n+2$ en 0 de $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
8. Donner une CNS sur a, b, c réels positifs pour que
$$\forall x \in [0,1],\ 1 + x^a \leqslant (1+x^b)^c.$$
9. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

4 Corrections

4.1 Applications

1. $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$
2. $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$
3. $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

4.2 Exercices

1. On fait le DL de f à l'ordre 1 en 0 : $f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x)$, où ε tend vers 0 en 0. On a alors
$$s_n = f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
Le premier terme tend vers $f'(0)/2$. Soit r_n le second terme.
On prend $\alpha > 0$: par limite de ε en 0, il existe η tel que $|\varepsilon(x)| < \alpha$ sur $[0, \eta]$.
Pour $N \geqslant 1/\eta$, on a pour tout $n \geqslant N$, $k/n^2 \in [0, \eta]$, et donc $|r_n| \leqslant \alpha$.
D'où la limite de s_n : $f'(0)/2$.
2. Les points où $f(x_0) > 0$ ne posent pas de problèmes. Soit donc x_0 un zéro de f. f admet donc en x_0 un minimum local, et donc $f'(x_0) = 0$. On note aussi que comme $f \geqslant 0$, $f''(x_0) \geqslant 0$.
Par Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0, on a
$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + o(x - x_0)^2.$$
On a donc
$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)}.$$
Ainsi, $\sqrt{f}$ est dérivable à gauche et à droite en x_0, avec respectivement les dérivées $-\sqrt{f''(x_0)/2}$ et $\sqrt{f''(x_0)/2}$.
Finalement, $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si en tout zéro x_0 de f, $f'(x_0) = 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $h > 0$. Par Taylor-Lagrange, on a
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2;$$
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2.$$

En combinant les deux, par l'inégalité triangulaire

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leqslant h^2 M_2.$$

On obtient alors

$$2h\,|f'(x)| \leqslant h^2 M_2 + |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant h^2 M_0 + 2M_0,$$

et finalement

$$|f'(x)| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}.$$

On minimise le terme de droite en prenand $h = \sqrt{M_2/2M_0}$, et on a alors le résultat.

4. C'est évidemment en 0 que le problème se pose. On prolonge g à $\mathbb{R}$ par $g(0) = f'(0)$, et donc g est continue.

   Montrons par récurrence sur n que g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, avec $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.
   - $n = 1$: On a pour $x \neq 0$

     $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{xf'(0) + x^2 f''(0) - xf'(0) - \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

     qui tend vers $\frac{1}{2}f''(0)$.
   - Soit $n \geqslant 2$. On se ramène au cas où les $n+1$-ièmes dérivées de f sont nulles en 0 en posant

     $$\hat{f}(x) = f(x) - \sum_{k=1} n + 1 \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

     Par hypothèse de récurrence, $\hat{g} = \hat{f}/x$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, et $\hat{g}(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0$.
     On dérive :

     $$\hat{g}^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{x} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-1)^{n-k} (n-k)! \frac{f^{(k)}(x)}{x^{n-k+1}}.$$

     Le DL de $\hat{f}^{(k)}(x)$ en 0 à l'ordre $n-k+1$ donne $\hat{f}^{(k)}(x) = o(x^{n-k+1})$.
     Donc $\hat{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et donc g aussi.

5. On calcule de deux façons le DL de la fonction :
   - d'une part, $e^x - 1 = x + o(x)$, et donc $(e^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$.
   - d'autre part, $(e^x - 1)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} e^{kx}$, et $e^{kx} = \sum_{\ell=0}^n \frac{k^\ell}{\ell!} x^\ell + o(x^n)$.
     En intervertissant les sommes, on a donc

     $$(e^x - 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} x^\ell.$$

   Par unicité du DL, on a donc le résultat.

6. On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{999} x^k/k!\right) &= \ln\left(e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})\right)\\ &= \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})\right)\\ &= x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})\end{aligned}$$

7. En dérivant, on trouve $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$. D'où

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

8. En $x = 1$, on a $c \geqslant 1$.
   On fait tendre x vers 0 :
   $$1 + x^a \leqslant 1 + cx^b + o(x^b),$$
   c'est-à-dire
   $$1 \leqslant cx^{b-a} + o(x^{b-a}).$$
   Donc $a \geqslant b$.
   Réciproquement, cela convient.
9. On applique Taylor-Young en a :
   $$f(a+h) = f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2 f''(a)+o(h^2) \qquad f(a-h) = f(a)-hf'(a)+\frac{1}{2}h^2 f''(a)+o(h^2).$$
   Donc $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2 f''(a) + o(h^2)$, et donc la limite cherchée est $f''(a)$.