Systèmes linéaires

1 Questions de cours

1. Énoncer et démontrer les formules de Cramèr.
2. Montrer que l'intersection de sous-espaces affines d'un espace E est soit vide, soit un sous-espace affine de E.
3. Décrire l'algorithme du pivot de Gauß.

2 Applications

1. Résoudre pour $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z & = a \\ -x + 2y - 3z & = b \\ x + 2y + z & = c \end{cases}$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} (i+1)x + (1-2i)y + (-1+3i)z & = 2+i \\ x - 2y + z & = 0 \\ ix + (2-i)y - 2z & = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre pour $m \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x - y + z & = m \\ x + my - z & = 1 \\ x - y - z & = 1 \end{cases}$$

3 Exercices

1. Montrer que toute matrice inversible A peut s'écrire $A = T_1 P T_2$, où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures, et P est une matrice de permutation. Question bonus : montrer que la décomposition est unique.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à *diagonale dominante*, *i.e*

$$\forall i,\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \,.$$

   Montrer que A est inversible.
3. Soient A, B, C, D quatre points du plan. Déterminer une CNS sur A, B, C, D pour qu'il existe quatre points M, N, P, Q tels que A, B, C, D soient respectivement les milieux de MN, NP, PQ, QM.
4. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels distincts deux à deux, et $y_1, \ldots, y_{n+1}$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré n qui prend en $x_1, \ldots, x_{n+1}$ les valeurs $y_1, \ldots, y_{n+1}$.
5. Soient $k_{i,j} \in \mathbb{Z}$, où pour tous $i, j \leqslant n$, $k_{i,i}$ impair et $k_{i,j}$ est pair si $i \neq j$. Montrer que pour $a_i \in \mathbb{C}$, le système admet une unique solution :

$$\forall i \leqslant n,\ \sum_{j=0}^{n} k_{i,j} x_j = a_i.$$

6. Soient trois droites du plan distinctes d'équations $a_i x + b_i y = c_i$, $i = 1, 2, 3$. Montrer que si les trois droites sont concourantes, alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Qu'en est-il de la réciproque ?

7. Résoudre le système dans $\mathbb{C}$

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = 1 \\ x_1 & + & 2x_1 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = 1 \\ x_1 & + & 2x_1 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 3x_n & = 1 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_1 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = 1 \end{array}\right.$$

4 Corrections

4.1 Applications

1. On a $8x = 8a + 5b - c$, $8y = -2a + b + 7c$, $8z = -4a - 7b + 5c$.
2. On a $x = y = z = i$.
3. On a si $m = -1$, $S = \{(y, y, -1)\ |y \in \mathbb{C}\}$, et si $m \neq -1$, $x = \frac{m+1}{2}$, $y = 0$ et $z = \frac{m-1}{2}$.

4.2 Exercices

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Posons quelques notations :
   – $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indices i, j ;
   – pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = Id + \lambda E_{i,j}$;
   – pour tout i et tout $\alpha \neq 0$, $D_i(\alpha) = Id + (\alpha - 1)E_{i,j}$.
   Multiplier A à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, et à gauche revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
   Multiplier A à droite par $D_i(\alpha)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow \alpha C_i$, et à droite revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
   On applique l'algorithme suivant :
   Soit i_1 le plus grand indice k tel que $a_{k,1} \neq 0$. On fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$ pour $i \neq i_1$ et $C_j \leftarrow C_j - \frac{a_{i_1,j}}{a_{i_1,1}} C_1$.
   Cela ne revient qu'à multiplier à gauche et à droite par des matrices de T_s. On termine par $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} C_1$ pour être dans la situation :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

   On prend ensuite i_2 le plus grand indice k tel que $a_{k,2} \neq 0$. Notons que $i_2 \neq i_1$. Par les mêmes opérations, on annule les coefficients de la colonne 2 et de la ligne i_2 : cela ne modifie par les 0 de la colonne 1 et de la ligne i_1.
   On itère le procédé, et on obtient une matrice de permutation P_σ, où σ est la permutation définie par $(1\ i_1\ i_{i_1}\ \cdots)$.
   On a donc une décomposition $A = T_1 P_\sigma T_2$, $T_1, T_2 \in T_s$.

Supposons qu'on ait deux décompositions $T_1 P_\sigma = P_\tau T_2$.
Alors $T_2 = P_{\tau^{-1}} T_1 P_\sigma$. Supposons $\sigma \neq \tau$: il existe i tel que $\sigma(i) < \tau(i)$.
Le coefficient i, i de T_2 est non nul car T_2 inversible, et l'égalité précédente nous donne l'égalité :

$$T_2(i,i) = T_1(\tau(i), \sigma(i)) = 0,$$

d'où une contradiction.

2. On veut montrer que $AX = 0$ a une unique solution. Soit donc X une solution. Posons i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$.
La ligne i_0 du système nous donnc donc

$$-a_{i_0,i_0} x_{i_0} = \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j,$$

d'où

$$|a_{i_0,i_0}| \, |x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j} x_j| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}| \, |x_{i_0}| \, .$$

Par hypothèse, on a donc $|x_{i_0}| = 0$ et donc $X = 0$.

3. On note a, b, c, d, m, n, p, q les abscisses de A, B, C, D, M, N, P, Q. Le problème revient à l'existence d'une solution à

$$\begin{cases} m + n & = 2a \\ n + p & = 2b \\ p + q & = 2c \\ q + m & = 2d \end{cases}$$

Le système est de rang 3, et la condition de compatibilité est $a + c = b + d$, $i.e$ les milieux de AC et BD coïncident.

4. Si $a_0, \dots, a_n$ sont les coefficients de P, cela revient à résoudre le système linéaire $P(x_i) = y_i$, pour $0 < i < n + 2$. On retrouve un déterminant de Vandermonde, qu'on sait non nul.
5. Il suffit de noter que si une matrice à coefficients entiers a tous ses coefficients pairs sauf ceux de la diagonale qui sont impairs, alors son déterminant est un entier impair, donc non nul.
6. Soit (x, y) le point d'intersection des trois droites. Alors

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y - c_1 & = 0 \\ a_2 x + b_2 y - c_2 & = 0 \\ a_3 x + b_3 y - c_3 & = 0 \end{cases}$$

Donc $(x, y, -1)$ est une solution du système, non nulle, et donc le déterminant de la matrice du système est nul.
La réciproque est fausse : on a en fait que le déterminant est nul si et seulement si les droites sont parallèles ou concourantes.

7. On fait les opérations élémentaires $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, et on trouve comme solution unique $(1, 0, \dots, 0)$.