# Suites numériques

## 1 Questions de cours

1. Montrer que toute suite a *au plus une* limite.

2. Montrer que toute suite convergente est bornée.

3. Montrer que toute suite extraire d'une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tend aussi vers $\ell$.

## 2 Applications

1. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou faux ?
   – Si $(u_n)$ converge vers $l$, alors $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers $l$.
   – Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent, alors $(u_n)$ converge.
   – Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent et ont la même limite $l$, alors $(u_n)$ converge vers $l$.

2. Montrer qu'une suite $(a_n)$ est arithmétique *si et seulement si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+2}+a_n}{2} = a_{n+1}.$$

3. Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)$ converge *si et seulement si* $(u_n)$ est stationnaire.

## 3 Exercices

1. On dit qu'une suite $(s_n)_n$ est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant n,\ |s_p - s_q| < \varepsilon.$$
Montrer qu'une suite de Cauchy est nécessairement convergente.

2. Montrer que $\dfrac{\log(2)}{\log(3)}$ est irrationnel, et en déduire que $\left(e^{i\alpha \log n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ diverge.

3. Quelle est la limite de
$$u_n = \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}\ ?$$

4. Soit $(u_n)$ une suite complexe telle que $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent. Montrer que $(u_n)$ converge.

5. Soit $(u_n)$ une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$
Montrer que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes, et donc que $(S_n)$ converge.

6. Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. On pose

$$v_n = \sup_{p \geqslant n} u_p \text{ et } w_n = \inf_{p \geqslant n} u_p.$$

Montrer que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent, et comparer leurs limites.

7. Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}.$$

8. Soit $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$. Montrer que

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)$$

converge, et calculer sa limite.

9. Montrer que la suite $(\cos n)_n$ diverge.

# 4 Corrections

## 4.1 Applications

1. C'est vrai, faux ($(-1)^n$ par exemple), et vrai.
2. Soit $(a_n)$ une suite arithmétique, de raison $r$. On a alors pour tout $n$,

$$a_n = a_0 + rn.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+2}+a_n}{2} &= \frac{a_0+(n+2)r+a_0+nr}{2}\\ &= \frac{2a_0+2nr+2r}{2}\\ &= a_0+(n+1)r\\ &= a_{n+1}\end{aligned}$$

Réciproquement, si une suite $(a_n)$ vérifie la relation, on a pour tout $n$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0.$$

On montre par récurrence double sur $n$ que $a_n = a_0 + nr$, où $r = a_1 - a_0$.
– pour $a_0$ et $a_1$, c'est ok.
– Si c'est vrai aux rangs $n$ et $n+1$, alors

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n = 2(a_0 + nr + r) - a_0 - nr = a_0 + (n+1)r.$$

Finalement, $(a_n)$ est arithmétique.
3. Le sens réciproque est trivial. Pour le sens direct, soit $\ell$ la limite de $(u_n)$. Si $\ell \notin \mathbb{Z}$, alors

$$E(\ell) < \ell < E(\ell) + 1,$$

et donc à partir d'un certain rang, $E(\ell) < u_n < E(\ell) + 1$, ce qui contredit le fait que $u_n \in \mathbb{Z}$. Donc $\ell \in \mathbb{Z}$. Donc à partir d'un certain rang, on a $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$, et donc $u_n = \ell$.

## 4.2 Exercices

1. On commence par remarquer que $(s_n)$ est bornée : on a $|s_p - s_N| < 1$ et donc $s_p < 1 + s_N$. Par théorème de Bolzano-Weirstraß, on peut extraire une sous-suite $s_{\varphi(n)}$ convergente, vers un réel $l$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de la sous-suite nous donne

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |s_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon.$$

Comme $(s_n)$ est de Cauchy

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N,\ |s_p - s_q| < \varepsilon.$$

On prend alors $N = \max(N_1, N_2)$ et on a

$$\forall n \geqslant N,\ |s_n - l| \leqslant |s_n - s_{\varphi(n)}| + |s_{\varphi(n)} - l| < 2\varepsilon.$$

2. Sinon, on peut écrire avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{p}{q},$$

et donc $2^q = 3^p$, ce qui est impossible.
Posons $z_n = e^{i\alpha \log n}$. Si $(z_n)$ converge, soit $\ell$ sa limite. On a alors la convergence de $(z_{2n})$ et $(z_{3n})$ vers $\ell$, et donc

$$e^{i\alpha \log}\ell = \ell \text{ et } e^{i\alpha \log 3}\ell = \ell.$$

On en déduit l'existence de deux entiers $\beta$ et $\gamma$ tels que

$$\alpha \log 2 = 2\beta\pi \text{ et } \alpha \log 3 = 2\gamma\pi.$$

Finalement, $\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\beta}{\gamma}$, ce qui est impossible.

3. On encadre chacun des $E(kx)$ : $kx \leqslant E(kx) < kx + 1$, et on trouve que la limite est $x/2$.

4. Soient $a, b, c$ les limites de $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ respectivement. Alors $(u_{6n})$ est une suite extraite de $(u_{3n})$, donc converge vers $c$, et est aussi une suite extraite de $(u_{2n})$, donc converge vers $a$. Par unicité de la limite, $a = c$.
De la même façon, $(u_{6n+3})$ est extraite de $(u_{3n})$ et de $(u_{2n+1})$, et donc $b = c$.
Finalement, $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite, et donc $(u_n)$ converge.

5. On a $S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$, et $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{n+2} \geqslant 0$, et $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$. Donc les deux suties sont adjacentes.
Elles convergent donc vers la même limite, et donc $(S_n)$ converge aussi, vers cette limite.

6. $(v_n)$ est clairement décroissante, et $(w_n)$ clairement croissante. On a aussi $w_n \leqslant v_n$. La suite $(v_n)$ est décroissante, et minorée par $w_0$, donc converge vers une limite $\ell$. De même, $(w_n)$ converge vers une limite $m$.
Comme $w_n \leqslant v_n$, on a donc $m \leqslant \ell$.

7. On a

$$u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Or pour $k \in \{2, \ldots, n-2\}$, on a

$$\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Donc

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leqslant \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \to 0.$$

Finalement, $u_n \to 2$.

8. On montre par récurrence que $(1-z)u_n = 1 - z^{2^{n+1}}$.
   – Pour $n = 0$, on a $u_0 = (1+z)$ et donc $(1-z)u_0 = (1-z^2)$.
   – Si c'est vrai au rang $n$, on a

   $$u_{n+1} = \left(1 + z^{2^{n+1}}\right) u_n,$$

   et donc

   $$u_{n+1} = \left(1 + z^{2^{n+1}}\right) \times \left(1 - z^{2^{n+1}}\right).$$

   Une identité remarquable nous donne le résultat.

   Comme $|z| < 1$, $z^{2^{n+1}} \to 0$, et donc $(1-z)u_n \to_n 1$. Donc $(u_n)$ converge, et sa limite est $\frac{1}{1-z}$.
9. Sinon, soit $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On a alors

   $$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1),$$

   et en passant à la limite

   $$2\ell = 2\ell\cos(1).$$

   Comme $\cos(1) \neq 0$, on a $\ell = 0$.

   Mais $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, et donc en passant à la limite $\ell = -1$. D'où une contradiction.