Nombres réels

1 Questions de cours

1. Montrer que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure.

2. Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe un entier n tel que $nb > a$.

3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, *i.e* qu'entre tous deux réels on peut trouver un rationnel.

2 Applications

1. Montrer que la fonction *partie entière* est croissante.

2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, telle que
$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b.$$
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent, et vérifient $\sup A \leqslant \inf B$.

3. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, bornées, telles que $A \subseteq B$.

   Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.

3 Exercices

1. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe, *i.e* montrer que
$$\exists x \in [0;1];\ f(x) = x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \text{et } f(xy) = f(x)f(y).$$

3. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A+B$ est majorée, et $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y).$$

5. Soit x et y deux réels. Montrer que
   (i) $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$
   (ii) $1 + |xy-1| \leqslant (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

6. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A.$$

7. Montrer que

$$\exists a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ \exists b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ a^b \in \mathbb{Q}.$$

8. Résoudre l'équation

$$E\left(\frac{x+1}{3}\right)+E\left(\frac{x+2}{3}\right) = E\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{x-1}{2}.$$

9. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que G est soit un $a\mathbb{Z}$, pour un $a \in \mathbb{R}$, ou dense dans $\mathbb{R}$.

   (On pourra admettre que les $a\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.)

4 Corrections

4.1 Applications

1. Soient $x \leqslant y \in \mathbb{R}$. On a $E(x) \leqslant x \leqslant y$.
   Or $E(x)$ est un entier, et $E(y)$ est le plus grand entier inférieur à y.
   Donc $E(x) \leqslant E(y)$.
2. Soit $b \in B$. Alors A est majorée par B. Donc A est non vide est majorée dans $\mathbb{R}$, donc $\sup A$ existe et $\sup A \leqslant b$.
   Maintenant, B est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide, et majorée par $\sup A$. Donc $\inf B$ existe et $\sup A \leqslant \inf B$.
3. On a

$$\begin{aligned} \sup A &\leqslant \sup B \\ \inf B &\leqslant \inf A \\ \inf A &\leqslant \sup A \\ \inf B &\leqslant \sup B \\ \inf B &\leqslant \sup A \\ \inf A &\leqslant \sup B \end{aligned}$$

4.2 Exercices

1. On pose $A = \{x \in [0;1] \mid f(x) \geqslant x\}$. On a clairement $0 \in A$, donc A est non vide. Comme A est bornée, A admet une borne sup $b \leqslant 1$.
   Soit maintenant $x \in A$. On a donc $x \leqslant b$, et par croissance de f, $f(x) \leqslant f(b)$. Donc pour tout x de A, :
   $$x \leqslant f(b).$$
   $f(b)$ majore donc A, et par définition de sup, on a $f(b) \geqslant b$. On peut en déduire ici que $b = \max A$. Par croissance de f, $f(f(b)) \geqslant f(b)$, et donc $f(b) \in A$. D'ici on déduit $f(b) = \max A$.
   Finalement, $f(b) = b$.
2. La fonction nulle est solution évidente, on suppose donc maintenant que f est non nulle. On a $f(0) = 2f(0)$, et donc $f(0) = 0$. On a, pour un x tel que $f(x) \neq 0$:
   $$f(x) = f(1 \times x) = f(1) \times f(x).$$
   Donc $f(1) = 1$. Par somme, $f(-1) = -1$.
   Par récurrence, on trouve $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   On continue par $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

On a pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$.
En prenant $x \leqslant y$, on peut écrire $f(y) = f(x) + f(y - x) \geqslant f(x)$. Donc f est croissante.
Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{E(nx)}{n} \leqslant x < \frac{E(nx)+1}{n}.$$

Par croissante de f, on a donc

$$f\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leqslant f(x) < f\left(\frac{E(nx)+1}{n}\right),$$

et donc

$$\frac{E(nx)}{n} \leqslant f(x) < \frac{E(nx)+1}{n}.$$

Quand $n \to \infty$, on obtient donc $f(x) = x$.
Donc $f = Id_{\mathbb{R}}$.

3. Tout x de $A + B$ s'écrit $a + b$, et donc $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$. $\sup(A + B)$ existe donc, et

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B.$$

Si $a \in A$ et $b \in B$, on a alors $a = a + b - b \leqslant \sup(A + B) - b$. Donc $\sup(A + B) - b$ majore A et donc

$$\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b,$$

c'est à dire

$$b \leqslant \sup(A + B) - \sup A.$$

Donc $\sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A$, et on peut donc conclure.

4. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant f(x, y_0),$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y_0).$$

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y_0)$ minore $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y_0)$ et donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf_{y_0 \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y_0).$$

5. (i) On a

$$2|x| = |x + y + x - y| \leqslant |x + y| + |x - y|,$$

et

$$2|y| = |x + y - (x - y)| \leqslant |x + y| + |x - y|.$$

En sommant les deux inégalités, on a le résultat.

(ii) L'inégalité recherchée est équivalente à

$$|xy-1|-|x+y-xy-1| \leqslant |x-1|+|y-1|\,.$$

On utilise l'ingalité de Minkowski, $|a|-|b| \leqslant |a+b|$, avec $a = xy-1$ et $b = x+y-xy-1$, et on obtient le résultat.

6. On note $M = \sup A$ et $m = \inf A$. Pour $(x,y) \in A^2$, on a donc $m \leqslant x \leqslant M$ et $m \leqslant y \leqslant M$. Donc on a

$$|x-y| \leqslant M-m.$$

Donc, en passant au sup :

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| \leqslant M-m.$$

Soit α un majorant de B. Alors on a pour $(x,y) \in A^2$, $x \leqslant \alpha + y$. Donc

$$\forall y \in A,\ M-\alpha \leqslant y.$$

Finalement, $M - m \leqslant \alpha$.
Donc on a bien

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = M-m.$$

7. Deux cas s'offrent à nous :
   - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est bon.
   - Sinon, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est rationnel.

8. On a donc $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}$, et donc $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$. En particulier x est impair.
L'équation s'écrit alors

$$E\left(\frac{x+1}{3}\right) + E\left(\frac{x+2}{3}\right) = x.$$

Or la fonction

$$f(x) = E\left(\frac{x+1}{3}\right) + E\left(\frac{x+2}{3}\right) - x$$

vérifie $f(x+3) = f(x) - 1$.
Comme $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, on en déduit que 1 est la seule solution, car f est constante égale à $-k$ sur $[3k; 3k+2]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

9. On donne l'idée générale.
Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et soit m l'infimum de $G \cap \mathbb{R}_+^*$.
   - Si $m > 0$, alors on montre que $m \in G$, et que $G = m\mathbb{Z}$.
   - Si $m = 0$, et $a < b \in \mathbb{R}$, alors on trouve $x \in G$ tel que $0 < x < b-a$. Pour un certain n, $a < nx < b$ et $nx \in G$, et donc G est dense.