Calculs de primitives

1 Exercices

1. Montrer le *théorème de Darboux* : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

   En déduire que la fonction "partie entière" n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. Montrer que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. Donner des primitives de $\frac{x^5}{1+x^{12}}$; $\frac{1}{x(x^2-1)}$; $\frac{x+1}{x^2-x+1}$

4. Donner des primitives de $\frac{1}{x^2-2x+2}$; $\frac{x}{x^2+2x+2}$; $\frac{1}{x(x^2+1)}$

5. Donner des primitives de $\frac{1}{x^3+1}$; $\frac{x}{x^3-1}$; $\frac{x^4+1}{x^4-1}$

6. Calculer l'intégrale
$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}.$$

7. Donner une primitive de
$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

8. Soit f définie par $f(x) = \frac{ax^3+5x^2+bx+3}{x^2(x-1)^2}$. Déterminer a et b pour que les primitives de f soient des fractions rationnelles.

9. Donner un exemple de fonction non continue sur $\mathbb{R}$ admettant une primitive.

10. Montrer le *théorème de Darboux* : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

    Montrer qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui admet une primitive, telle que f^2 n'admette pas de primitive. (on pourra considérer $x\sin(1/x)$, $x^2\sin(1/x)$, $\cos(1/x)$, $\sin(1/x)$)

2 Corrections

2.1 Exercices

1. On prend k, $f'(a) < k < f'(b)$. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - kx$. Elle est dérivable, et $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.

   Comme g est dérivable, elle est continue, et donc a un minimum ; ça ne peut pas être en a, sinon $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geqslant 0$, et en prenant la limite on a une contradiction, ni en b pour la même raison.

   Ce minimum est donc atteint en $c \in]a,b[$, et donc $f'(c) = k$.

   La fonction "partie entière" n'a pas la propriété de valeurs intermédiaires, et donc n'admet pas de primitive.
2. Sinon, soit F une primitive de f qui s'annule en 0. F est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et comme elle est continue, elle est nulle sur $\mathbb{R}$. D'où une contradiction.
3. $\frac{1}{6}\arctan(x^6)$;
   $-|\ln(x)| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$;
   $\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
4. $\arctan(x-1)$;
   $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$;
   $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
5. $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;
   $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;
   $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \arctan x$.
6. On commence par chercher une primitive de la fonction ; on fait le changement de variable usuel $t = \tan x/2$, pour $x \in [\pi/2, \pi[$ ou $x \in]\pi, 3\pi/2]$. On trouve alors que
   $$F \ : \ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan(x/2)+1}{2\sqrt{2}}$$
   est une primitive de notre fonction sur les intervalles $[\pi/2, \pi[\ ]\pi, 3\pi/2]$.

   Attention, on ne peut pas conclure, puisque F n'est pas une primitive sur l'intervalle entier !

   On sépare donc l'intégrale en deux par Chasles, et on calcule chaque morceau en utilisant une limite. On trouve au final $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
7. Il suffit de noter que $\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$. Une primitive est donc $\tan(x) - 1/\tan(x)$.
8. On décompose en éléments simples en fonction de a et b :
   $$f(x) = \frac{6+b}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{a-b-6}{x-1} + \frac{a+b+3}{(x-1)^2}.$$

Les primitives de f sont donc, à constante près

$$F(x) = (6+b)\ln|x| - \frac{3}{x} + (a-b-6)\ln|x-1| - \frac{a+b+3}{x-1}.$$

En regardant $\lim \ln$ et $\lim \ln x/x$, on note que $\ln$ ne peut pas être une fraction rationnelle. On doit donc avoir $6+b=0$ et $a-b-6=0$, donc $b=-6$ et $a=0$.

9. On peut par exemple prendre la dérivée de $x^2\sin(1/x)$.
10. On renvoie au premier exercice pour le théorème de Darboux.
    Pour la suite, soit $f_1(x) = x\sin(1/x)$, $f_1(0)=0$ et $f_2(x) = x^2\sin(1/x)$, $f_2(x)=0$. f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive, et f_2 est dérivable, donc $f_2'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, $f_2'(0)=0$ admet une primitive.
    Finalement, $u(x) = -f_2'(x) + 2f_1(x)$ admet une primitive, avec $u(x) = \cos(1/x)$, $u(0)=0$.
    De la même façon, $v(x)\sin(1/x)$, $v(0)=0$ admet une primitive.
    Or $w = u^2 + v^2$