Polynômes

1 Questions de cours

1. Soient P, Q deux polynômes, Q non constant. Montrer que
$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$$

2. Montrer que les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}$ sont exactement les polynômes de degré 1.

3. Démontrer le théorème de Gauß en partant du théorème de Bézout.

2 Applications

1. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x > 0$, $P(x)\sin(x) + Q(X)\cos(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

3. Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

3 Exercices

1. Déterminer tous les polynômes complexes dont l'image est incluse dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ *si et seulement s'*il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

3. Déterminer le nombre de racines réelles de
$$P_n = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1.$$

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire ayant une racine z_0 de module < 1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à celui de P tel que
   - $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \Rightarrow |Q(z)| = |P(z)|$
   - $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > 1 \Rightarrow |Q(z)| > |P(z)|$

5. Déterminer tous les polynômes complexes non nuls tels que
$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$
(On pourra montrer tout d'abord qu'un tel P n'a pas de racine réelle).

6. Montrer qu'un polynôme complexe tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}$ est en fait à coefficients réels.

7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.

8. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ de $P = X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

9. Pour un polynôme R, on note $Z(R)$ l'ensemble de ses racines. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants, tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P-1) = Z(Q-1)$. Montrer que $P = Q$.

4 Corrections

4.1 Applications

1. Parmi les polynômes constants, seul 0 convient. Sinon P est nécessairment de degré 2. On écrit $P = aX^2 + bX + c$, et en calculant, on obtient $b = 0$ et $c = -a$.
2. On a, en évaluant en $n\pi$, $Q(n\pi) = 0$. Donc Q a une infinité de racines, donc $Q = 0$. De même, $P = 0$.
3. Sinon, soit a une racine au moins double. Alors $P_n(a) = P_n'(a) = 0$, et en particulier $P_n(a) - P_n'(a) = 0$. Or $P_n(a) - P_n'(a) = a^n/n!$, et donc $a = 0$. Mais 0 n'est pas racine de P_n.

4.2 Exercices

1. On note que si P est un polynôme complexe, non constant, alors P est surjectif : par théorème de d'Alembert-Gauß, $P(z) - w$ a une racine pour tout $w \in \mathbb{C}$.

   Donc les seuls polynômes complexes d'image incluse dans $\mathbb{R}$ sont les constantes réelles.
2. Le sens réciproque est trivial. Soit donc P un polynôme positif. Si P est constant, c'est trivial, et donc on suppose P non constant.

   Comme la limite en $+\infty$ de P est nécessairement positive, donc $+\infty$, le coefficient dominant λ de P est positif.

   Si a est une racine de P, de multiplicité n, on écrit $P = (X - a)^n$ où a n'est pas racine de Q. Par continuité, Q garde un signe constant au voisinage de a, et comme P aussi, $(X - a)^n$ ne change pas de signe en a. Donc n est pair.

   Finalement, on peut écrire P sous la forme

   $$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)^{\eta_j} (X - \overline{\lambda_j})^{\eta_j},$$

   où les a_i sont réels, α_i entiers pairs, et $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

   Posons

   $$C = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{a_i/2} \prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)^{\eta_j}.$$

   On a alors $C\overline{C} = P$, et donc si on écrit $C = A + iB$, A et B polynômes réels, on a bien $P = A^2 + B^2$.
3. On note que 1 est racine de P_n. Les cas $n = 0, 1$ sont triviaux, et on prend donc $n \geqslant 2$.

   On peut écrire

   $$P_n = (X - 1)(nX^{n-1} + (n - 1)X^{n-2} + \cdots + 2x + 1) = (X - 1)Q_n',$$

   où $Q_n = X^n + \cdots + X + 1$.

   On peut écrire (quitte à passer aux fonctions si on n'a pas vu les fractions rationnelles)

   $$Q_n = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1},$$

et donc en dérivant

$$Q_n' = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

On étudie les variations du numérateur pour trouver une unique racine si n pair, et pas de racines si n impair.

Finalement, P admet 2 racines réelles si n est pair, une seule si n impair.

4. Regardons le cas $\deg P = 1$. On a $P = X - z_0$. Alors $Q = 1 - z_0 X$ convient (calculer $|Q(z)|^2 - |P(z)|^2$).

   Pour le cas général, soient $z_0, z_1, \ldots, z_k$ les racines de P de module < 1 (éventuellement répétées plusieurs fois). On a

   $$P = (X - z_0) \cdots (X - z_k)R,$$

   où R polynôme complexe sans racine dans le disque unité ouvert. On pose

   $$Q = (1 - z_0 X) \cdots (1 - z_k X)R.$$

   On utilise le cas $\deg P = 1$ pour affirmer que Q convient.

5. Si a est une racine réelle de P, alors $(a+1)^2$ aussi. On construit ainsi une suite de racines de P, qu'on vérifie strictement croissante. Donc P a une infinité de racines, ce qui est impossible.

   Supposons P non constant. Si a est racine de P, alors $a^2,\ a^3, \ldots$ sont aussi racines de P.

   Donc soit $a = 0$ (cas impossible), soit $a^{2^p} = a^{2^q}$ pour $p, q \in \mathbb{N}$ distincts. a est alors nécessairement de module 1.

   De plus, $(a+1)^2$ est aussi racine, donc $a = -1$ (cas impossible) où $|a+1| = 1$.

   En regardant les conditions, on trouve $a = j$ ou $a = j^2$. Finalement, P est de la forme

   $$P = (X - j)^p (X - j^2)^q.$$

   On compare

   $$P(X)P(X-1) = (X-j)^p (X-j^2)^q (X+j^2)^p (X+j)^q$$

   et

   $$P(X^2) = (X^2 - j)(X^2 - j^2) = (X^2 - j^4)(X^2 - j^2)$$

   pour trouver $p = q$.

   Finalement, P est de la forme

   $$(X^2 + X + 1)^n.$$

6. On définit $\overline{P}$ le polynôme conjugué de P,

   $$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X.$$

   On vérifie que $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$.

   L'hypothèse donne

   $$\begin{aligned} P(x) &= \overline{P(x)} \\ &= \overline{P}(\overline{x}) \\ &= \overline{P}(x) \end{aligned}$$

   Donc P et $\overline{P}$ coïncident sur un ensemble infini ($\mathbb{R}$), et donc sont égaux.

   Finalement, $a_k = \overline{a}_k$, et donc P est à coefficient réels.

7. On remarque, en appliquant le théorème de Rolle, que P' est aussi simplement scindé, et donc P'', *etc.*.

   Si P a deux coefficients nuls consécutifs, alors une certaine dérivée de P aura 0 pour racine double, ce qui est donc impossible.

8. Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de P avec $x_1 + x_2 = 2$. Les relations coefficients/racines nous donnent

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0\\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12\\ \sigma_4 &= x_1x_2x_3x_4 = -5\end{aligned}$$

   σ_1 nous donne $x_3 + x_4 = -2$, puis σ_2 donne $x_1x_2 + x_3x_4 = 4$, puis σ_3 donne $x_1x_2 - x_3x_4 = 6$.

   On a déduit $x_1x_2 = 5$ et $x_3x_4 = -1$.

   Donc x_1 et x_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$, et x_3 et x_4 sont les racines de $X^2 + 2X - 1$. Finalement

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + 2i\\ x_2 &= 1 - 2i\\ x_3 &= -1 + \sqrt{2}\\ x_4 &= -1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

9. Notons $n = \deg P$ et $m = \deg Q$, et supposons $n \geqslant m$. Soit $R = P - Q$ qui est donc de degré $\leqslant n$.

   R s'annule sur $Z(P) \sqcup Z(P-1)$ (l'union est clairement disjointe).

   On montre facilement que P admet $P - \deg(P \wedge P')$ racines distinctes, et $P - 1$ admet $P - 1 - \deg((P-1) \wedge P')$.

   Mais P et $P - 1$ sont premiers enctre eux, et donc $(P-1) \wedge P'$ et $P \wedge P'$ sont deux diviseurs de P' premiers entre eux. Donc

$$\deg((P-1) \wedge P') + \deg(P \wedge P') \leqslant n - 1.$$

   Finalement, $|Z(R)| \geqslant 2n - \deg(P \wedge P') - \deg((P-1) \wedge P') \geqslant n + 1$.