Matrices

1 Questions de cours

1. Montrer que le produit matriciel est associatif.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, avec respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

3. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2 Applications

1. Pour une matrice A on note $\sigma(A)$ la somme de tous les termes de A. Soit J la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que pour toute matrice A

$$JAJ = \sigma(A)J.$$

2. Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique.

3. Montrer que $((1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de $f : (x,y,z) \mapsto (z,y,x)$ dans cette base.

3 Exercices

1. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante, telle que $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B.

   Montrer que A est inversible *si et seulement si* $f(A) \neq 0$.

2. On appelle *matrice positive* toute matrice dont les coefficients sont tous positifs ou nuls, et on note $A \geqslant 0$.

   Montrer que $A \geqslant 0$ *si et seulement si* pour tout vecteur colonne X, $X \geqslant 0 \Rightarrow AX \geqslant 0$.

3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à *diagonale dominante*, *i.e*

$$\forall i,\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|\,.$$

   Montrer que A est inversible.

4. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

5. Soit N une matrice carrée. On dit que N est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Montrer que si N est nilpotente, alors $I - N$ est inversible. En déduire l'inverse de
$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice non nulle. Montrer que $(A_i X)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

7. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles vérifiant
$$ABC = 0.$$
Montrer que deux au moins des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer que dans une certaine base de E, la matrice de f est
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = 0$. Montrer que l'une des deux est de rang au plus 1.

4 Corrections

4.1 Applications

1. Un calcul explicite des coefficients de la matrice JAJ donne le résultat.
2. On remarque ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$. Donc AB est symétrique *si et seulement si* A et B commutent.
3. On remarque que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

et donc les trois vecteurs forment bien une base. On a alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Exercices

1. On a $f(0) = f(0)^2$ et $f(I) = f(I)^2$, et donc $f(0), f(I) \in \{0, 1\}$. Si on avait $f(0) = 1$, alors pour toute A,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A)f(0) \\ &= f(A0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui contredit la non constance de f. On montre de même que $f(I) = 1$.
Soit A une matrice inversible. Alors

$$\begin{aligned} f(A)f(A^{-1}) &= f(AA^{-1}) \\ &= f(I_n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et donc $f(A) \neq 0$.
Réciproquement, soit A une matrice non inversible. On remarque que pour toute matrice B équivalente à A, on a $f(A) = 0$ *si et seulement si* $f(B) = 0$.
Il suffit donc de trouver une matrice équivalente à A dont l'image par f est nulle. On sait que l'équivalence est exactement le rang, et donc on cherche une matrice B de même rang que A.

Prenons $K_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{\mathrm{rg}(A)} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Alors K_r est nilpotente, c'est-à-dire que pour un certain p, $K_r^p = 0$. Donc $f(K_r) = 0$. De plus, on voit que $\mathrm{rg}(K_r) = r$, et donc K_r est équivalente à A.

2. On voit tout de suite que le produit de deux matrices positives est positif, d'où le sens direct.

   Pour le sens réciproque, on remarque que les vecteurs colonnes de la base canonique $e_1, \dots, e_n$ sont positifs, et donc les vecteurs colonnes de A $Ae_1, \dots, Ae_n$ le sont aussi.

3. Supposons que les vecteurs colonnes de A sont liés :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C},\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0,$$

   les λ_i non tous nuls. Soit k tel que $|\lambda_k| = \sup_i |\lambda_i| > 0$. On a alors à la ligne k

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{k,j} = 0,$$

   donc

$$a_{k,k} = -\sum_{j \neq k} \frac{\lambda_j}{\lambda_k} a_{k,j},$$

   et donc

$$\begin{aligned} |a_{k,k}| &\leqslant \sum_{j \neq k} \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_k|} |a_{k,j}| \\ &\leqslant \sum_{j \neq k} |a_{k,j}| \end{aligned}$$

   D'où une contradiction.

4. On a $AB = A + B$, et donc $I - A - B + AB = I$, soit $(I_n - A)(I_n - B) = I$.

   Donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I - B$. Comme l'inverse à gauche et à droite sont égaux, on a aussi $(I - B)(I - A) = I$, ce qui donne $BA = B + A = A + B$.

5. On a $(I - N) \times (I + N + \cdots + N^{p-1}) = I$, et donc $I - N$ est inversible.

   On a alors, en appelant N la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   et M la matrice de l'énoncé, $M = I - N$. On vérifie alors que N est nilpotente, et on trouve finalement

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 - b^2 & -a^3 + 2ab - c \\ 0 & 1 & -a & a^2 - b^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Soit Y un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si on montre qu'il existe un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie X sur Y, alors en décomposant la matrice de cet endomorphisme sur la base (A_i), on aura le résultat.

   (X) est libre, donc on peut la compléter en une base $\mathscr{B} = (X, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. On définit f sur la base par $f(X) = Y$ et $f(e_i) = 0$, et c'est bon.
7. Si deux sont inversibles, on a trois cas
   - A et B : alors en multipliant à gauche par $B^{-1}A^{-1}$, on a $C = 0$. Non.
   - B et C : idem.
   - A et C : on multiplie à gauche par A^{-1} et à droite par C^{-1}, on trouve $B = 0$. Non.
8. On a $f^2 \neq 0$, donc il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.

   Posons $e_1 = x$, $e_2 = f(x)$ et $e_3 = f^2(x)$.

   On vérifie que la famille est libre, et donc est une base, et alors dans cette base, la matrice de f est de la forme voulue.
9. Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés à A et B. On a donc $u \circ v = 0$, donc $\mathrm{Im}(v) \subseteq \ker(u)$. De plus,

$$\mathrm{rg}(v) = 3 - \dim\ker(v) \leqslant \dim\ker(u).$$

   On a donc $\dim\ker(u) + \dim\ker(v) \geqslant 3$, donc $\dim\ker(u) \geqslant 2$ ou $\dim\ker(v) \geqslant 2$.

   On a alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant 1$ ou $\mathrm{rg}(v) \leqslant 1$.