Logique et ensembles

1 Applications du cours

1. Soient A et B deux variables propositionnelles. Donner la table de vérité de
$$(A \to B) \vee (B \to A).$$
2. Soit E un ensemble. Donner la négation de la formule :
$$\forall f \in E^E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \Big(|x-y| < \eta \ \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$
3. Les deux formules suivantes sont-elles équivalentes ?
$$A \to (B \to C) \text{ et } (A \wedge B) \to C.$$

2 Exercices

1. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.
2. Soit f une fonction de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner les formules logiques traduisant les énoncés suivants, en utilisant les connecteurs propositionnels, les quantificateurs et les signes $=$ et $>$:
   (i) La fonction f s'annule.
   (ii) La fonction f est la fonction nulle.
   (iii) La fonction f n'est pas constante.
   (iv) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
   (v) La fonction f admet un minimum.
   (vi) La fonction f n'admet pas de maximum.
   (vii) La fonction f ne s'annule qu'une seule fois.
3. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathfrak{p}(E)$:
   (i) $A \cup X = B$
   (ii) $A \cap X = B$
4. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
5. Soient A et B deux ensembles. Montrer que
$$A \subset B \longrightarrow \mathfrak{p}(A) \subset \mathfrak{p}(B).$$
Que dire de la réciproque ?

6. (i) Soient $A = B = \{1, 2\}$. Calculer $\mathfrak{p}(A \times B)$.
   (ii) Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2 \mid i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E^2$ et $C = \{(i, j) \in E^2 \mid i > j\}$. Montrer que $\{A, B, C\}$ est une partition de E^2 (*i.e* que leur réunion est exactement E^2, et qu'ils sont disjoints deux à deux).
7. On dit qu'un ensemble est décrit en compréhension lorsqu'on le décrit par une propriété vérifiée par ses éléments. On dit qu'il est décrit en extension si on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k\}$ et $\{2k | k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions en compréhension et en extension des l'ensemble des entiers pairs.

   Donner des descriptions en compréhension et en extension des ensembles suivants :
   (i) L'ensemble des entiers impairs.
   (ii) L'ensembles des puissances de 10.
   (iii) L'ensemble des rationnels (relativement à $\mathbb{R}$).
   (iv) L'ensemble des valeurs prises par une fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (v) L'ensemble des nombres complexes transcendants.
8. Sur une île, on distingue deux types de gens :
   – Les Sincères, qui disent tout le temps la vérité ;
   – Les Menteurs, qui ne disent jamais la vérité.
   On prend deux personnes aux hasard sur l'île : Alice et Bob.

   On note A la variable "Alice est Sincère", et B la variable "Bob est Sincère".

   Dans les deux cas suivants, traduire l'énoncé en terme de formule logique, et dire si Alice et Bob sont Sincères ou Menteurs :
   (i) Bob dit : "Nous sommes tous les deux des Menteurs".
   (ii) Alice dit : "Je ne suis ni une Sincère, ni une menteuse". Bob ajoute "C'est vrai".
9. On introduit le connecteur "Barre de Scheffer", vérifiant $p|q$ si et seulement si p et q ne sont pas vrais en même temps.

   Donner la table de vérité de $|$. Montrer qu'on peut définir tous les autres connecteurs à partir de celui-là.
10. On définit l'ensemble $\mathrm{Sf}(F)$ des sous-formules d'une formule propositionnelle F inductivement :
    – si F est une variable propositionnelle, alors $\mathrm{Sf}(F) = \{F\}$;
    – si $F = \neg G$, alors $\mathrm{Sf}(F) = \{F\} \cup \mathrm{Sf}(G)$;
    – si $F = G \alpha H$ avec $\alpha \in \{\wedge, \vee, \to\}$, alors $\mathrm{Sf}(F) = \{F\} \cup \mathrm{Sf}(G) \cup \mathrm{Sf}(G)$.
    Montrer par que si F a n connecteurs logiques, alors $\mathrm{Sf}(F)$ a au plus $2n + 1$ éléments.
11. Soit $\sharp$ le connecteur propositionnel définit par la table

$\sharp$	0	1
0	0	1
1	1	0

    Exprimer $\sharp$ en fonction de $\vee$ et $\neg$.
12. On considère le connecteur ternaire @ qui est vrai si au moins deux de ses arguments sont vrais.

    Donner la table de vérité de @, et l'exprimer en fonction de $\wedge$ et $\neg$.

3 Corrections

3.1 Applications

1. C'est une tautologie : la table est remplie de 1.

2.
$$\exists f \in E^E,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in E,\ \exists y \in E,\ \Big(|x-y| < \eta \wedge |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\Big).$$
La formule signifie que toute fonction de E dans E est continue, et donc sa négation qu'il existe une fonction de E dans E non continue.

3. Oui.

3.2 Exercices

1. Supposons qu'il existe un ensemble de tous les ensembles, $\mathfrak{E}$. Alors $X = \{A \in \mathfrak{E} \mid A \notin A\}$ est un ensemble. Supposons que $X \in X$. Alors par définition de X, $X \notin X$. D'où une contradiction.
   Donc $X \notin X$. Mais par définition alors, $X \in X$. Encore une contradiction.
2. (i)
$$\exists x \in I,\ f(x) = 0.$$
   (ii)
$$\forall x \in I,\ f(x) = 0.$$
   (iii)
$$\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ \neg(f(x) = f(y)).$$
   (iv)
$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \neg(f(x) = f(y)).$$
   (v)
$$\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ f(y) > f(x).$$
   (vi)
$$\forall x \in I,\ \exists y \in I,\ f(y) > f(x).$$
   (vii)
$$\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = 0 \wedge f(y) = 0 \wedge \Big(\forall z \in I,\ \neg(f(z) = 0)\Big).$$
3. (i) Si $A \not\subset B$, l'équation n'a clairement pas de solutions.
   Sinon, $A \cup X = B$ implique $B \subset X$ et $B \backslash A \subset X$. Réciproquement, les B vérifiant cela sont solutions.
   (ii) Si $B \not\subset A$, l'équation n'a clairement pas de solutions.
   Sinon soit X qui convient. On peut écrire
$$X = (A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X).$$
   Donc, $X = B \cup C$ où $C \subset \overline{A}$.
   Réciproquement, si $X = B \cup C$, $C \subset \overline{A}$, Alors
$$\begin{aligned} A \cap X &= A \cap (B \cup C) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &= B \end{aligned}$$
4. *Cf.* votre cours.
5. Supposons $A \subset B$. Soit $X \in \mathfrak{p}(A)$. Tous les éléments de X sont donc des éléments de A, donc des éléments de B.
   Donc $X \in \mathfrak{p}(B)$.
   La réciproque est vraie. Supposons $\mathfrak{p}(A) \subset \mathfrak{p}(B)$. Soit $x \in A$. Alors $\{x\} \in \mathfrak{p}(A)$, donc $\{x\} \in \mathfrak{p}(B)$, et donc $x \in B$.

6. (i) On a $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. Donc

$$\mathfrak{p}(A \times B) = \{\{(1,1)\},\{(1,2)\},\{(2,1)\},\{(2,2)\},\{(1,1),(1,2)\},\{(1,1),(2,1)\},\dots\}.$$

(ii) On a

$$\begin{aligned} A &= \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4),(1,4)\} \\ B &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \\ C &= \{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\} \end{aligned}$$

7. (i)

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k+1\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii)

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 10^k\} = \{10^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(iii)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{p}{q}\} = \{\frac{p}{q} \mid (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$$

(iv)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ x = f(y)\} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(v)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X],\ P(z) = 0\}$$

8. (i) On a dans ce cas

$$B \to (\neg A \wedge \neg B) \text{ et } \neg B \to (A \vee B).$$

Donc on a

$$F = (\neg B \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge (B \vee (A \vee B)).$$

On simplifie dans chaque parenthèse :

$$\begin{aligned} \neg B \vee (\neg A \wedge \neg B) &\equiv (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg B) \\ &\equiv (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg B \\ B \vee (A \vee B) &\equiv B \vee A \end{aligned}$$

Finalement,

$$F = (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg B \wedge (B \vee A),$$

en développant un peu :

$$F = (\neg B \vee \neg A) \wedge ((\neg B \wedge B) \vee (\neg B \wedge A)),$$

$$F = (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg B \wedge A.$$

F est vrai si et seulement si $B = 0$ et $A = 1$.

(ii) De la phrase d'Alice on déduit

$$A \to (\neg A \wedge \neg\neg A) \text{ et } \neg A \to (A \vee \neg A),$$

ce qui indique que Alice est Menteuse, et donc Bob est un Menteur aussi.

9.

p	q	$p\|q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On a :

$$\begin{aligned} \neg p &\equiv p|p \\ p \wedge q &\equiv (p|q)|(p|q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

10. On procède par induction :
   - Si F est une variable, $\mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(F)) = 1$.
   - Si $F = \neg G$, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(F)) \leqslant 1+\mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(G))$. Or G a $n-1$ connecteurs, et donc $\mathrm{Sf}(G) \leqslant 2(n-1)+1 = 2n-1$.
   - Si $F = G\alpha H$, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(F)) \leqslant 1 + \mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(G)) + \mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(H))$. Si G et H ont respectivement i et j connecteurs, on a $i + j = n - 1$, et

     $$\mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(G)) \leqslant 2i + 1 \text{ et } \mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(H)) \leqslant 2j + 1.$$

     On a donc

     $$\begin{aligned} \mathrm{Card}(\mathrm{Sf}(F)) &\leqslant 1 + 2i + 1 + 2j + 1 \\ &\leqslant 3 + 2(n-1) \\ &\leqslant 2n + 1 \end{aligned}$$

11. On a

$$A\sharp B \equiv (\neg(A \vee \neg B)) \vee (\neg(\neg A \vee B)).$$

12. On a

A	B	C	$@(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

On a

$$@(A,B,C) \equiv \neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)).$$