Limites et continuité

1 Questions de cours

1. Montrer que la limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

2. Montrer que si $f : A \to \mathbb{R}$, et $a \in A$, alors la limite de f en a, si elle existe, est $f(a)$.

3. Montrer que la continuité uniforme

2 Applications

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante (*i.e* k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$), telle que $f(0) = 0$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $u_n \to 0$.

2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. Montrer que si f est continue, f s'annule au moins une fois.

3 Exercices

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la *fonction indicatrice de* $\mathbb{Q}$, *i.e*
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Montrer que f n'est continue en aucun point.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$
   Montrer que f est une fonction constante.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que tout réel admette au plus deux antécédents. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ qui admet exactement un antécédent.

5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et qui tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

6. Montrer que $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 \mapsto 0$ n'est pas continue en 0, mais que $g : x \mapsto xf(x)$ l'est.

7. Déterminer les automorphismes continus de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

8. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

9. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant $f \circ f = Id$.

4 Corrections

4.1 Applications

1. On montrer par récurrence $|u_n| < k^n \times |a|$. Comme $0 \leqslant k < 1$, la suite de droite converge, vers 0, et donc u aussi.
2. f est continue sur tous les intervalles $[k, k+1[$. Il reste à étudier la continuité en $a \in \mathbb{Z}$.
   – Quand $x \to a$, $x > a$, on a $f(x) \to a = f(a)$ car $E(x) \to a$.
   – Quand $x \to a$, $x < a$, on a $f(x) \to a = f(a)$ car $E(x) \to a - 1$.
   Finalement f est continue à gauche et à droite, donc continue.
3. Avec la définition de limite, on montre que f prend une valeur négative et une valeur positive. Par valeurs intermédiaires, f s'annule.

4.2 Exercices

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, et donc il existe $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $v \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to a$ et $v \to a$.
   On a alors $f(u_n) = 1 \to 1$ et $f(v_n) = 0 \to 0$. Par caractérisation séquentielle de la limite, f n'a pas de limite en a, et donc est discontinue.
2. On utilise le fait que $2^{-n} \to 0$. Comme $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, on a en passant à la limite en n (f continue en 0)
   $$f(x) = f(0).$$
3. Supposons le contraire : on a $f(x) = a \neq b = f(y)$. Soit c entre a et b, non entier. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c$, ce qui n'est pas possible.
4. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Si y n'a qu'un antécédent, c'est ok. Sinon, soient $a < b$ les deux antécédents de y. f est continue sur $[a, b]$, donc admet un minimum et un maximum, l'un au moins n'étant pas une extremité (car $f(a) = f(b)$), par exemple un minimum c.
   Si $f(c)$ n'a que c comme antécédent, c'est ok. Sinon, soit c' un autre.
   – Si $c' \in [a, b]$, alors f ne peut pas être constante sur $[c, c']$, et il existe d entre $f(c)$ et $\max_{[c,c']} f$ qui possède au moins trois antécédents (faire un dessin).
   – Si $c' \notin [a, b]$, alors de la même façon il existe d entre y et $f(c)$ qui possède au moins trois antécédents (faire un dessin).
   Finalement, c n'admet qu'un antécédent.
5. Soit $\varepsilon > 0$. La définition de limite nulle en l'infini nous donne un $A > 0$ tel que si $x \geqslant A$, alors $|f(x)| \leqslant \varepsilon/2$.
   Comme f est continue, elle est continue sur $[0, A+1]$, et donc uniformément continue sur ce segment (théorème de Heine). Donc il existe $\alpha > 0$ tel que
   $$\forall x, y \in [0, A+1],\ |y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons maintenant $\alpha' = \min(\alpha, 1) > 0$. Montrer que α' convient dans la définition d'uniforme continuité. Soient donc $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $|x - y| \leqslant \alpha'$. On peut par exemple supposer $x < y$.
– si $x \in [0, A]$, alors $x, y \in [0, A+1]$ et $|y - x| \leqslant \alpha$, et donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
– sinon, $x \in [A, +\infty)$. Alors $x, y \in [A, +\infty)$ et donc $|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y)| + |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

6. On prend
$$x_k = \frac{2}{(4k+1)\pi} \text{ et } y_k = \frac{2}{(4k+3)\pi}.$$
Alors $f(x_k) = 1$ et $f(y_k) = -1$, alors que $x_k, y_k \to 0$.
Pour g, posons $t = \frac{1}{x}$. On a alors
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{t\to\infty} g\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sin(t) \\ &= \lim \frac{\sin(t)}{t}\end{aligned}$$
Or on sait que cette limite vaut 0 ($t \to \infty$ et $\sin(t)$ borné).
7. On a $f(1) = 1$, puis pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ par propriété de morphisme, puis pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $f(z) = z$, et enfin pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = q$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et f continue, on a donc nécessairement $f = id$.
8. Prenons $\varepsilon = 1$. On a alors un $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [0, 1[,\ |y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1.$$
Donc si $x \in [1 - \alpha, 1[$, on a $|f(x) - f(1 - \alpha)| \leqslant 1$, ce qui donne
$$|f(x)| \leqslant 1 + |f(1 - \alpha)|.$$
Sur $[1, 1 - \alpha]$, la fonction f esst continue donc bornée, par un M.
Finalement, f est bornée sur $[0, 1[$ par $\max(M, 1 + |f(1 - \alpha)|$.
9. La fonction f est bijective et continue, donc strictement monotone. Elle ne peut pas être décroissante, puisque surjective dans $\mathbb{R}^+$.
S'il existe x tel que $f(x) < x$, alors on a
$$f(f(x)) < f(x),$$
et donc $f(x) > x$. D'où une contradiction.
De même, $f(x) > x$ est impossible.
Finalement, $f = id$.