Intégration

1 Questions de cours

1. Énoncer et montrer le théorème d'intégration par parties.

2. Énoncer et montrer le théorème de changement de variables.

3. Montrer que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est nulle.

2 Applications

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et soit $T > 0$. Montrer que si $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est constante, alors f est périodique.

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$, alors f est positive ou négative sur $[a,b]$.

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue d'intégrale $1/2$ sur $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.

3 Exercices

1. Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$. Déterminer
$$\inf_{f\in F} \int_0^1 |f' - f|\,.$$

2. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, alors $I_n = \int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers ∞.

3. Montrer le lemme de Gronwall : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]0,1]$
$$f(t) \leqslant a \int_0^t f(u)\mathrm{d}u.$$
Alors f est nulle.

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue d'intégrale nulle. On pose $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Montrer que
$$\int_0^1 f^2 \leqslant -\alpha\beta.$$

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$. Donner une CNS sur f pour avoir
$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\,.$$

6. Soit $a < b \in \mathbb{R}$, et $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On appelle f l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ s'annulant ainsi que leur dérivée en a et b. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F$ telle que $g'' = f$ si et seulement si
$$\int_a^b f = \int_a^b t f(t) \mathrm{d}t = 0.$$

7. Soient f une fonction continue impaire sur $\mathbb{R}$, g continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(c) = g(c) \int_a^c f.$$

8. Montrer que toute fonction continue $[a,b] \to \mathbb{R}$ possède une unique primitive d'intégrale nulle sur $[a,b]$.

9. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t) \mathrm{d}t.$$
Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$, et calculer $F''(x)$.
En déduire que
$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u.$$

4 Corrections

4.1 Applications

1. Il suffit de prendre une primitive F de f, et alors $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante, donc de dérivée nulle.
2. On regarde le cas $\int_a^b f \geqslant 0$ (le cas négatif est similaire). On a alors $\int_a^b |f| - f = 0$ par linéarité de l'intégrale, or $|f| - f$ est positive, et donc nulle.
3. $\varphi \ : \ t \mapsto f(t) - t$ est continue sur $[0,1]$, et $\int_0^1 \varphi = 0$. Donc φ s'annule.

4.2 Exercices

1. À toute fonction $f \in F$ on associe $g \ : \ x \mapsto f(x)e^{-x}$: on a alors $f' - f = \exp \times g'$. Quand f parcourt F, g parcourt $G = \{g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid g(0) = 0, \ g(1) = 1/e\}$, et donc $h = g'$ parcourt l'ensemble des fonctions continues d'intégrale $1/e$ sur $[0,1]$. En résumé :

$$\inf_{f \in F} \int_0^1 |f' - f| = \inf_{g \in G} \int_0^1 e^x \, |g'(x)| \, \mathrm{d}x = \inf_{h \in H} \int_0^1 e^x \, |h(x)| \, \mathrm{d}x.$$

   Or pour $h \in H$, on a clairement

$$\int_0^1 e^x \, |h(x)| \, \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |h(x)| \, \mathrm{d}x = 1/e.$$

   Montrons que $1/e$ est bien la borne inférieure cherchée. On construit une suite h_n telle que $\int_0^1 e^x \, |h(x)| \, \mathrm{d}x$ tende vers $1/e$.
   On prend h_n définie par : h affine sur $[0,1/n]$ avec $h(0) = 2n/e$, $h(1/n) = 0$, et h nulle sur $[1/n, 1]$. Un calcul rapide nous donne

$$\int_0^1 e^x \, |h_n(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{1/n}}{e},$$

   et donc on a bien le résultat.
2. On commence par le montrer pour les fonctions caractéristiques, puis pour les fonctions en escaliers, puis pour les fonctions continues.
   Si f est la fonction caractéristique de $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(t) e^{int} \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta e^{int} \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(e^{in\beta} - e^{in\alpha}\right).$$

   On a donc $|I_n| \leqslant \frac{2}{n}$.
   Si f est une fonction en escalier, alors on peut l'écrire comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, et la linéarité de l'intégrale et de la limite donne le résultat.

Si f est une fonction continue quelconque, alors on trouve g en escalier telle que $|f-g| < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}|I_n| &\leqslant \left|\int_a^b (f(t)-g(t))e^{int}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b g(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b g(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant (b-a)\varepsilon + \left|\int_a^b g(t)e^{int}\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0, et donc on a bien $\lim I_n = 0$.

3. On pose $F : \ t \mapsto \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$. F est dérivable, et l'hypothèse est $F' \leqslant aF$. Donc la fonction $g : t \mapsto F(t)e^{-at}$ a une dérivée négative, et donc est décroissante sur $]0,1]$. Or $g(0) = F(0) = 0$, et est positive car f l'est, et donc g est nulle. Donc F est nulle, et donc f aussi.
4. $f-\alpha$ et $\beta - f$ sont des fonctinos positives, et donc

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_0^1 (f-\alpha)(\beta - f) \\ &= (\beta+\alpha)\int_0^1 f - \alpha\beta - \int_0^1 f^2 \\ &= -\alpha\beta - \int_0^1 f^2\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.
5. Supposons qu'on ait l'égalité demandée. On pose $\int_a^b f = re^{i\theta}$, où $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $g(t) = f(t)e^{-i\theta}$. On a alors

$$\int_a^b g = e^{-i\theta}\int_a^b f = r \in \mathbb{R}.$$

Donc $\int_a^b g = \int_a^b \Re(g)$.
Or on a $|g| = |f|$, et l'hypothèse du départ nous donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \Re(g)$, et donc

$$\int_a^b (|g| - \Re(g)) = 0.$$

Or la fonction $|g| - \Re(g)$ est réelle, continue, positive, et donc elle est nulle. Finalement, g est une fonction réelle positive.
Donc f est de la forme $t \mapsto g(t)e^{i\rho}$, où $\rho \in \mathbb{R}$. Réciproquement, ces fonctions conviennent.
6. On note G l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui s'écrivent sous la forme g'' avec $g \in F$.
Soit $f \in G$, $f = g''$. On a alors

$$\int_a^b f = \int_a^b g'' = [g'(t)]_a^b = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b tg''(t)\mathrm{d}t \\ &= [tg'(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)\mathrm{d}t \\ &= [tg'(t) - g(t)]_a^b \\ &= 0\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que les moments d'ordre 0 et 1 de f soient nuls. On pose

$$f_1(x) = \int_a^x f \text{ et } g(x) = \int_a^x f_1.$$

Alors g est $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et $g'' = f$. De plus

$$g'(a) = f_1(a) = 0 \text{ et } g(a) = 0,$$

et

$$g'(b) = f_1(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

et

$$g(b) = [tf_1(t)]_a^b - \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

7. On pose $h = f - g \times \int_a^x f$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $h(a) = f(a)$, et $h(-a) = f(-a) = -f(a)$ par imparité de f (deux fois). Donc $h(a)h(-a) \leqslant 0$, et donc par théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule entre $-a$ et a.
8. Pour l'existence, soit $g(x) = \int_a^x f$. Alors

$$F \ : \ x \mapsto g(x) - \int_a^b g$$

répond au problème.
L'unicité vient du fait que toutes les primitives de f sont égales à constante près.
9. Par Chasles, on coup l'intégrale en deux parties

$$F(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

F est donc dérivable, et

$$F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Donc F est $\mathscr{C}^2$, et $F''(x) = -f(x)$.
On a

$$F'(u) = \int_u^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

et comme $F(0) = 0$

$$F(x) = \int_0^x F'(u)\mathrm{d}u = \int_0^x \int_u^1 f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$