Géométrie du plan

1 Questions de cours

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Schwarz.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne.
3. Soit u un vecteur unitaire du plan. Combien existe-il de vecteurs unitaires orthogonaux à u ? Le montrer, et exprimer leurs coordonnées en fonction de celles de u.

2 Applications du cours

1. On considère le système :
$$\begin{cases} mx + my & = 1 \\ x + my & = m^2 \end{cases}$$
   (i) Pour quels $m \in \mathbb{R}$ ce système a-t-il une unique solution ? Dans ce cas, la donner.
   (ii) Dans le(s) autre(s) cas, quelle est la solution du système ?
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3y - 5x + 12 = 0$. Calculer la distance de $M = (8, -5)$ à la droite $\mathscr{D}$.
3. Soient $u = (3, 1)$ et $v = (-2, 6)$. Calculer l'angle orienté (u, v).

3 Exercices

1. Soit $\mathscr{H}$ la courbe représentative de la fonction $f \ : \ x \mapsto \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormal. Si A, B, C sont trois points de $\mathscr{H}$, montrer que l'orthocentre du triangle (ABC) est sur $\mathscr{H}$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer et tracer les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ définis par
$$\mathscr{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (|y| + 1)^2 = 1\right\}$$
$$\mathscr{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (|y| - 1)^2 = 1\right\}$$
3. On munit $\mathbb{R}^2$ du repère canonique (O, i, j). Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des points (x, y) vérifiant
$$x^2 - y^2 = 1.$$
   Soit $\mathscr{R}' = (O, u, v)$ le repère obtenu par rotation de $\frac{\pi}{4}$ de (O, i, j). Donner l'équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$.
4. Donner une méthode générale pour déterminer les droites contenant A et tangentes à un cercle $\mathscr{C}$. Appliquer cette méthode quand :
   (i) $A = (2, 3)$ et $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.
   (ii) $A = (0, 0)$ et $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

5. Soient A, B, C, D quatre points du plan euclidien. Montrer que
$$\left\langle \vec{DA}, \vec{BC} \right\rangle + \left\langle \vec{DB}, \vec{CA} \right\rangle + \left\langle \vec{DC}, \vec{AB} \right\rangle = 0.$$
En déduire que les hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes.
6. Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan euclidien, et n un entier posiif.
Montrer qu'il existe un point P_0 en dehors de la droite $\mathscr{D}$ et des points $P_1, \ldots, P_n$ sur $\mathscr{D}$ tels que la distance entre tout couple de ces points soit un entier strictement positif.
7. Soient A et B deux points du plan, et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout réel k, étudier l'ensemble $\mathscr{E}_k$ des points M du plan tels que
$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k.$$
8. Soient $\Delta\ :\ y = 2$ et $A = (2, 3)$. Donner l'équation cartésienne des points équidistants de Δ et A.
9. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O du plan, et soit P un point quelconque. On prend d une droite qui passe par P et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points (éventuellement confondus) A et B.
Montrer que $\left\langle \vec{PA}, \vec{PB} \right\rangle$ ne dépend que de $\mathscr{C}$ et non de d.
Soient A,B,C et D quatre points tels que (AB) et (CD) se coupent en P. Montrer que
$$A, B, C, D \text{ cocycliques } \Leftrightarrow \left\langle \vec{PA}, \vec{PB} \right\rangle = \left\langle \vec{PC}, \vec{PD} \right\rangle.$$

4 Corrections

4.1 Cours

1. L'inégalité de Schwarz est
$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|\|v\|.$$
Pour la montrer, on considère $f(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle$. Si $v = 0$, l'inégalité est évidente, et sinon
$$f(t) = t^2\|v\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + \|u\|^2$$
est un trinôme du second degré.
De plus, $f(t)$ est positif pour tout réel t, et donc le discriminant du trinôme est négatif, *ergo* l'inégalité demandée.
2. L'inégalité triangulaire est
$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$
Pour la montrer, on écrit $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$, et on utilise l'inégalité de Schwarz.
3. On peut écrire $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Alors $< u, v >= \cos(\theta - \varphi)$.
Donc u et v sont orthogonaux si et seulement si $\theta - \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$, ce qui donne exactement deux valeurs de φ possibles.
Si $u = (a, b)$, alors ces solutions sont $v = \pm(-b, a)$.

4.2 Applications

1. On regarde le déterminant du système :
$$\begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m.$$

Donc le système admet une unique solution si et seulement si $m^2 - m \neq 0$, *i.e* $m \neq 0$ ou $m \neq 1$.
Dans ces cas, les formules de Cramèr nous donnent la solution :

$$x = -m - 1 \text{ et } y = m + \frac{1}{m} + 1.$$

Si $m = 0$, le système se réduit à $x = 0$.
Si $m = 1$, le système devient $x + y = 1$, soit $y = 1 - x$.

2. On a

$$\operatorname{dist}(M, \mathscr{D}) = \frac{|-15 - 40 + 12|}{\sqrt{9+25}} = \frac{43}{\sqrt{34}}.$$

3. On a $(u, v) = \frac{\pi}{2}$.

4.3 Exercices

1. Soient respectivement a,b et c les abcisses de A,B et C.
$M = (x, y)$ est sur la hauteur issue de A si et seulement si $\left\langle \vec{AM}, \vec{BC} \right\rangle = 0$. On en déduit l'équation de cette hauteur :

$$h_A \ : \ x - \frac{y}{cb} = a - \frac{1}{abc}.$$

De même, on trouve

$$h_B \ : \ x - \frac{y}{ac} = b - \frac{1}{abc}.$$

On en déduit, en résolvant un système, les coordonnées de l'orthocentre de (ABC) :

$$H = \left(-\frac{1}{abc}, -abc \right).$$

Ses coordonnées vérifient bien l'équation de $\mathscr{H}$, et donc H est bien sur $\mathscr{H}$.

2. (i) Le point $M = (x, y)$ est dans $\mathscr{A}$ si et seulement si $x^2 + |y|^2 + 2|y| + 1 = 1$, *i.e* $|y| = -\frac{x^2+y^2}{2}$. C'est impossible, et donc $\mathscr{A} = \emptyset$.
   (ii) Soit $M = (x, y)$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{B} &\Leftrightarrow x^3 + |y|^2 - 2|y| + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow |y| = \frac{x^2+y^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y &= \frac{x^2+y^2}{2} \\ y &= -\frac{x^2+y^2}{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2y &= 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   $\mathscr{B}$ est donc la réunion de deux cercles : celui centré en $(0, 1)$ de rayon 1 et celui centré en $(0, -1)$ de rayon 1.

3. On a $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Par les formules de changement de repère, si M est de coordonnées (x', y') dans $\mathscr{R}'$ et (x, y) dans $\mathscr{R}$, on a

$$(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y', x' + y').$$

Ainsi,

$$M \in \mathscr{H} \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{2x'}.$$

4. On remarque que si le point de tangence est M et Ω le centre du cercle, alors $(\Omega M)\perp(AM)$, et donc M est sur le cercle de diamètre $[\Omega A]$.

   (i) On a ici $\Omega = (1, 0)$. L'équation du cercle de diamètre $[\Omega A]$ a pour équation $x^2+y^2-3x-3y+2 = 0$. Les coordonnées des points de contact des tangentes issues de A vérifient donc

   $$\left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2-2x+\frac{4}{5} & = 0 \\ x^2+y^2-3x-3y+2 & = 0 \end{array}\right.$$

   Ceci nous donne après résolution deux solutions

   $$M_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ et } M_2 = \left(\frac{36}{25}, -\frac{2}{25}\right).$$

   On en déduit les équations des droites correspondantes.

   (ii) Ici, on n'a pas de solutions.

5. On introduit un point O quelconque. On doit alors montrer que :

   $$\left\langle \vec{DO}+\vec{OA}, \vec{BO}+\vec{OC} \right\rangle + \left\langle \vec{DO}+\vec{OB}, \vec{CO}+\vec{OA} \right\rangle + \left\langle \vec{DO}+\vec{OC}, \vec{AO}+\vec{OB} \right\rangle = 0.$$

   On développe, et on trouve le résultat.
   Soit maintenant (ABC) un triangle quelconque. On trace les hauteurs issues de A et de B, et on note H leur point d'intersection.
   On a alors $\left\langle \vec{HA}, \vec{BC} \right\rangle = \left\langle \vec{DB}, \vec{CA} \right\rangle = 0$ par définition de "hauteur". Par l'égalité précédente, on a donc $\left\langle \vec{DC}, \vec{AB} \right\rangle = 0$, d'où le résultat cherché.

6. On peut supposer que $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = 0$. On fixe $0 < q_0 < \cdots < q_n$ une suite d'entiers strictement croissante.
   On pose pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$:

   $$a_k = q_0 \cdots q_{k-1} \text{ et } b_k = q_k \cdots q_n.$$

   On choisit ensuite nos points : $P_0 = (0, 2b_0)$ et $P_k = (a_k^2 - b_k^2, 0)$.
   $k \mapsto a_k^2 - b_k^2$ est strictement croissante, donc tous les P_k sont distincts, et on a, comme $a_k b_k = b_0$:

   $$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P_0, P_k)^2 &= (a_k^2 - b_k^2)^2 + (2b_0^2)^2 \\ &= (a_k^2 + b_k^2)^2 \end{aligned}$$

7. On introduit G le barycentre de (A, α) et (B, β). On a alors

   $$\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA} \text{ et } \vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GA}.$$

   On a donc

   $$MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\left\langle \vec{GA}, \vec{MG} \right\rangle,$$

   et de même pour MB^2.
   On en déduit, en utilisant $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = 0$, que

   $$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2.$$

   On en déduit donc que $\mathscr{E}_k$ est, selon le signe de $k - \alpha GA^2 - \beta GB^2$, l'ensemble vide, un point ou un cercle.

8. On a, pour un point $M = (x, y)$:

$$\mathrm{dist}(M, \mathscr{D})^2 = |y-2|^2 \text{ et } \mathrm{dist}(M, A)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2.$$

Donc M est équidistant de $\mathscr{D}$ et A si et seulement si

$$\begin{gathered}
(y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2, \\
y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9, \\
x^2 - 4x - 2y + 9 = 0, \\
y = \frac{-x^2 + 4x - 9}{2}.
\end{gathered}$$

9. Indication : On pourra introduire le point A' intersection de la droite perpendiculaire à (AB) passant par B avec $\mathscr{C}$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{PA}, \vec{PB} \right\rangle &= \left\langle \vec{PA}, \vec{PA'} + \vec{A'B} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{PA}, \vec{PA'} \right\rangle + \vec{0} \\
&= \left\langle \vec{PO} + \vec{OA}, \vec{PO} + \vec{OA'} \right\rangle \\
&= PO^2 - R^2
\end{aligned}$$

Le sens direct se fait directement par le résultat précedent. Pour le sens réciproque :
soit $\mathscr{C}$ le cercle qui passe par A, B, C, et soit D' le point d'intersection de ce cercle avec (CD). On a alors :

$$\left\langle \vec{PC}, \vec{PD'} \right\rangle = \left\langle \vec{PA}, \vec{PB} \right\rangle = \left\langle \vec{PC}, \vec{PD} \right\rangle.$$

Donc $D = D'$ (faire un dessin) et donc les points sont cocycliques.