Fractions rationnelles

1 Questions de cours

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer qu'il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G de degré strictement négatif tels que $F = E + G$.
2. Soit $F = \frac{A}{BC}$ avec $\deg A < \deg B + \deg C$ et B et C premiers entre eux. Montrer que F s'écrit de façon unique $F = \frac{U}{B} + \frac{V}{C}$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg C$.
3. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg(FG) = \deg F + \deg G$.

2 Applications

1. Décomposer en éléments simples $\frac{2X}{X^2+1}$.
2. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^2+X+1}$.
3. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X(X-1)^2}$.

3 Exercices

1. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = 1/X$.
2. Trouver une primitive de
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x}{x^4-1} \end{array}.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que
$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n(X + 1/X).$$
4. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ non constante avec pôles $a_1, \ldots, a_n$. On pose $D_F = \mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$. Montrer que $|\mathbb{C}\backslash F(D_F)| \leqslant 1$.
5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'ayant que des racines simples $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}.$$
Que vaut $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$?
6. Montrer le théorème de Gauß-Lucas : si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$
8. Donner la décomposition en éléments simples de
$$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}.$$

4 Corrections

4.1 Applications

1. $\dfrac{2X}{X^2+1} = \dfrac{1}{X-i} + \dfrac{1}{X+i}$
2. $\dfrac{1}{X^2+X+1} = \dfrac{i/\sqrt{3}}{X-j} + \dfrac{1/\sqrt{3}}{X-j^2}$
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{X-1}$

4.2 Exercices

1. Sinon, on écrit $R = X^m \frac{A}{B}$, où $A(O), B(0) \neq 0$. On a alors
$$\frac{1}{X} = \frac{X^{m-1}(mAB + X(A'B - AB')}{B^2},$$
d'où
$$B^2 = X^m(mAB + X(A'B - AB')).$$
   – si $m = 0$, on a $B^2 = X(A'B - AB')$, d'où $B(0) = 0$.
   – si $m > 0$, on a encore $B(0) = 0$.
   – si $m < 0$, B^2 possède un pôle d'ordre $-m$ en 0.
   Dans les trois cas, on a une contradiction.
2. On décompose la fraction correspondante en éléments simples sur $\mathbb{C}$:
$$\varphi = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i},$$
d'où
$$\varphi(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}.$$
Finalement, $\Phi(x) = \log \frac{|x^2-1|}{x^2+1}$ est une primitive de φ.
3. Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons donc le résultat jusqu'au rang $n-1$.
$$\left(X + \frac{1}{X}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k} \frac{1}{X^k}.$$
On pose $P_0 = 1$, et on a alors
$$\left(X + \frac{1}{X}\right)^n = X^n + \frac{1}{X^n} + \sum_{k=1}^{[n/2]} C_n^k P_{n-2k}\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

On pose alors

$$P_n(X) = X^n - \sum_{k=1}^{[n/2]} C_n^k P_{n-2k}(X).$$

4. On note $F = N/D$ la forme réduite de F. Comme F n'est pas constante, l'un au moins de N et D ne l'est pas. Si $z \in D_F$, l'équation $F(z) = \lambda$ équivaut à $(N - \lambda D)(z) = 0$, et donc deux cas se présentent :
   – si $N - \lambda D$ n'est constant pour aucun λ, alors $N - \lambda D$ a une racine z_λ, et alors $F(D_F) = \mathbb{C}$.
   – sinon, il existe α tel que $N - \alpha D$ soit constant. On note qu'alors si $\lambda \neq \alpha$, alors $N - \lambda D$ ne l'est pas, et donc admet une racine z_λ comme dans le premier cas. On a alors, comme $N - \alpha D \neq 0$, $N - \alpha D = 0$ n'a pas de solution. Alors $F(D_F) = \mathbb{C} \backslash \{\alpha\}$.
5. On décompose la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{P(X)}$. Les pôles de F sont les x_i et sont simples, et la partie entière de F est nulle. Donc

$$F(X) = \frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k \neq i}(x-i) - x_j)} \frac{1}{X - x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)(X - x_i)}. \qquad (\star)$$

   En évaluant en $X = 0$, on a le résultat.

   Pour calculer l'autre somme, on multiplie $(\star)$ par X, et en évaluant X par x, et en faisant tendre x vers l'infini, on trouve 1 si $n = 1$ et 0 si $n > 1$.
6. On écrit $P = c\prod_{i=1}^{r}(z - a_i)^{n_i}$ la décomposition de P en facteurs irréductibles. On a alors

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z - a_i}.$$

   Si z est une racine de P' qui n'est pas racine de P, on a donc

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z - a_i} = 0,$$

   d'où

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \frac{\overline{z} - \overline{a_i}}{|z - a_i|^2} = 0.$$

   Finalement

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|z - a_i|^2}\right)\overline{z} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i \overline{a_i}}{|z - a_i|^2}.$$

   Il ne reste qu'à passer au conjugué pour avoir le résultat.
7. On a

$$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k}$$

   où $\alpha_k = P''(x_k)/P'(x_k)$. La limite de $xP''(x)/P(x)$ quand $x \to +\infty$ est 0, et donc on a le résultat.

8. La partie entière est nulle, et $0, 1, \ldots, n$ sont les pôles simples. On a donc

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-k},$$

où

$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\cdots 1(-1)\cdots(k-n)} = (-1)^{n-k} C_n^k.$$