Dérivation, convexité, fonctions usuelles

1 Questions de cours

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f est convexe sur I, alors f' est croissante sur I.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f est convexe, alors courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

2 Applications

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $x > -1$, alors
$$\ln(1+x) \leqslant x.$$
En déduire que pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$
3. Donner les ensembles de définition et simplifier :
   (i) $\cos(2\arccos(x))$;
   (ii) $\cos(2\arcsin(x))$;
   (iii) $\sin(2\arccos(x))$.

3 Exercices

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right).$$
Simplifier $P_n(x)$.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f, alors a est en fait un minimum global.
3. Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(x)/x$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Résoudre l'équation
$$\operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argch}(x) = 1.$$
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$
6. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x, y \in I$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.

7. On définit la suite de Fibonacci (f_n) par

$$f_0 = 0, \ f_1 = 1, \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

   (i) Montrer que pour tout n

$$f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n.$$

   (ii) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$

$$\arctan(1/f_{2n}) = \arctan(1/f_{2n+1}) + \arctan(1/f_{2n+2}).$$

8. Résoudre l'équation

$$2^{\sin^2 x} = \cos x.$$

9. Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x.$$

4 Corrections

4.1 Applications

1. La convexité de f nous donne, si $x > 1$
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f(1) - f(0),$$
et donc
$$f(x) \geqslant (f(1) - f(0))\, x + f(0) \to \infty.$$
2. On déduit la première inégalité de la concavité de ln. Pour l'autre, on a
$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\\ &\leqslant e^{n \times \frac{1}{n}}\\ &= e\end{aligned}$$
et de même dans l'autre sens.
3. On prend dans chaque cas $x \in [-1, 1]$.
   (i) $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.
   (ii) $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2 \sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$.
   (iii) $\sin(2 \arccos x) = 2 \sin(\arccos x) \cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

4.2 Exercices

1. On calcule $P_n(x) \times \sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Par récurrence, on trouve
$$P_n(x) \sinh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sinh(x),$$
et on en déduit le résultat.
2. Soit $b \in I$, on suppose $b > a$. Comme a est un minimum local de f, il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(c) \geqslant f(a)$. Comme f est convexe, on a
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqslant 0,$$
et on en déduit $f(b) \geqslant f(a)$.
Le cas $b < a$ est identique.

3. Soit

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \end{array}$$

la fonction pente des cordes issues du point d'abscisse 1.
f est convexe, et donc τ est croissante. Donc τ admet une limite en $+\infty$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{(x-1)\tau(x) + f(1)}{x} \\ &= \frac{x-1}{x}\tau(x) + \frac{f(1)}{x} \end{aligned}$$

Donc f a la même limite que τ en $+\infty$.

4. La fonction $f : x \mapsto \operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argch}(x)$ est continue et strictement croissante sur $[1, \infty[$. Les limites sont $\operatorname{argsh}(1)$ en 1 et ∞ en ∞. On note que $\operatorname{sh}(1) \geqslant 1$, et donc $\operatorname{argsh}(1) \leqslant 1$. Par théorème de la bijection, l'équation possède donc une unique solution a.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(1) &= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) \\ &= a^2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-1} \\ &= a^2 + \sqrt{a^4-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh}(1) - a^2,$$

puis

$$a^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}.$$

Comme a est positif, on en déduit

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}.$$

5. On définit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$. f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \times \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \times \frac{1}{\operatorname{sh} x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

f est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité.
Comme $f(0) = 0$, on a donc le résultat voulu sur $\mathbb{R}^+$, et sur $\mathbb{R}$ tout entier par parité.

6. Soient a et b dans I. On pose
$$A = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\}.$$
On a clairement 0 et 1 dans A. L'hypothèse nouse donne
$$\lambda, \mu \in A \Longrightarrow \frac{\lambda+\mu}{2} \in A.$$
Par récurrence, on montre que pour tout n, pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n\}$, $k/2^n \in A$.
Soit $\lambda \in [0,1]$. On pose $k_n = E(2^n\lambda)$ et $\lambda_n = k_n/2^n$. On a donc $\lambda_n \to \lambda$, et $\lambda_n \in A$. Par passage à la limite dans l'inégalité de convexité, on a donc $\lambda \in A$.
Finalement, f est bien convexe.
7. (i) On montre la propriété $P(n)$ par récurrence.
$P(0)$ est triviale, et si on suppose $P(n)$ vraie :
$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} &= f_{n+1}^2 - (f_{n+2} - f_{n+1}) f_{n+2} \\ &= f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+2}^2 \\ &= f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+2}^2 && = (-1)^n \end{aligned}$$
(ii) On a alors :
$$\begin{aligned} &\tan\left(\arctan(1/f_{2n+1}) + \arctan(1/f_{2n+2})\right) - \tan\arctan(1/f_{2n}) \\ &= \frac{1/f_{2n+2} + 1/f_{2n+1}}{1 - \frac{1}{f_{2n+2} f_{2n+1}}} - \frac{1}{f_{2n}} \\ &= \cdots \\ &= \frac{f_{2n} f_{2n+2} - f_{2n+1}^2 + 1}{(f_{2n+2} f_{2n+1} - 1) f_{2n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$
On peut vérifier que $\arctan(1/f_{2n+1}) + \arctan(1/f_{2n+2})$ et $\arctan(1/f_{2n})$ sont dans $[0, \pi/4]$, et donc en passant à la tangente, on a le résultat voulu.
8. On note que nécessairement, $\cos x > 0$. Par périodicité, on se limite à chercher $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Posons $u = \cos x \in]0,1]$. L'équation devient alors
$$2^{1-u^2} = u,$$
ou encore
$$(1-u^2)\ln(2) = \ln(u).$$
$u = 1$ est une soltion évidente, et on suppose donc $u \neq 1$. On a alors
$$\frac{\ln(u)}{1-u^2} = \ln(2).$$
Si $u \in]0,1[$, on a $\ln(u) < 0$ et $\frac{1}{1-u^2} > 0$. En particulier $\frac{\ln(u)}{1-u^2} \neq \ln 2$.
La seule solution est donc $u = 1$, soit $x = 0$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

9. L'expression n'a de sens que pour $x > 0$. L'équation équivaut à

$$\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x),$$

soit

$$\sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ln(x) = 0,$$

et donc $\ln(x) = 0$ ou $\sqrt{x} = 2$.
Les solutions sont donc $x = 1$ et $x = 4$.