1 Questions de cours

1. Montrer que les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$.
2. Montrer que les demi-tours engendrent $\mathcal{SO}(E)$.
3. Soit f une rotation d'angle θ, d'axe orienté par ω. Montrer que pour tout x
$$f(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)\omega\wedge x + (1-\cos\theta)\langle\omega, x\rangle\omega.$$

2 Applications

1. Soit E euclidien orienté de dimension 3. Déterminer le noyau et l'image de $f \;:\; x \mapsto x \wedge u$ où u est un vecteur unitaire fixé.
2. Soient a, b, c, d quatre vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Montrer que $[a\wedge b, a\wedge c, a\wedge d] = 0$.
3. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe (i, j, k). Écrire la matrice dans (i, j, k) de la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $2\pi/3$.

3 Exercices

1. On considère l'application
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2} \end{array}.$$
Montrer que Φ est un produit scalaire, et calculer les orthogonaux de
— $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$;
— $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension n, et soient $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs unitaires de E tels que
$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2.$$
Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E.
3. Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle < 0$. Montrer que $p \leqslant n + 1$.
4. Soit E un espace euclidien, et soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
5. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle. Montrer que f est une rotation si et seulement si pour tous $u, v \in E$, $f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v)$.
6. Soient $a \neq 0$ et b deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Résoudre l'équation $a \wedge x = b$.
7. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe (i, j, k). Rechercher les rotations de E telles que
$$R(i) = -j \text{ et } R(i - j + k) = i - j + k.$$
8. Soit E euclidien orienté de dimension 3. Pour $a, b, c \in E$, montrer que
$$\det(a\wedge b, b\wedge c, c\wedge a) = \det(a, b, c)^2.$$
9.

4 Corrections

4.1 Applications

1. On a $\ker f = \operatorname{Vect} u$ clairement, et donc par théorème du rang $\operatorname{Im} u$ est de dimension 2. Comme $\operatorname{Im} f \subset \{u\}^\perp$, on a l'égalité.
2. C'est clair si $a = 0$, c'est clair aussi si $a \neq 0$.
3. On l'écrit dans une base orthonormée directe $\mathcal{C}$ adaptée à la rotation, et on applique les formules de changement de base pour trouver

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

4.2 Exercices

1. Montrons que Φ est un produit scalaire :
   - Φ est bien définie car les sommes sont en fait finies ;
   - Φ est clairement une forme bilinéaire symétrique ;
   - Φ est positive ;
   - Φ est définie positive par le théorème de Taylor pour les polynômes.
   - Soit $Q \in F_1^\perp$. En calculant les $\Phi(Q, X^k)$, on trouve $Q^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$, et donc Q est constant. Réciproquement, ok.
   - Soit $Q \in F_2^\perp$. En calculant $\Phi(Q, X^k - 1)$ on trouve

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k!Q(0) = Q^{(k)}(0).$$

   Pour k assez grand, on a nécessairement $Q^{(k)}(0) = 0$, d'où $Q(0) = 0$ et par suite $Q^{(k)}(0) = 0$ pour tout k. Donc par Taylor, $Q = 0$.
2. Montrons tout d'abord que E est libre. On a

$$\begin{aligned} 1 &= \|e_i\|^2 \\ &= \|e_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j \rangle^2 \end{aligned}$$

   La somme étant à termes positifs et valant 0, chaque terme est nul, et donc $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. On a en fait montré que la famille était orthogonale.
   Montrons qu'elle est génératrice. Soit donc $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Si $x \in F^\perp$, on a $\|x\|^2 = 0$, et donc $x = 0$.
3. On montre en fait que $p - 1$ vecteurs parmi la famille sont toujours linéairement indépendants. Sans perte de généralité, on peut prendre $(u_1, \ldots, u_{p-1})$. Soient donc λ_i tels que

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i = 0.$$

On pose $I = \{i \mid \lambda_i > 0$ et $J = \{i \mid \lambda_i \leqslant 0\}$. On a donc

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = \sum_{j\in J} -\lambda_j u_j.$$

Or on a

$$\left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i u_i, \sum_{j\in J} -\lambda_j u_j \right\rangle = - \sum_{i\in I, j\in J} \lambda_i\lambda_j \langle u_i, u_j\rangle \leqslant 0.$$

Finalement, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = \sum_{j\in J} \lambda_j u_j = 0.$$

En multipliant par u_p, on a donc

$$0 = \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i u_i, u_p \right\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle u_i, u_p\rangle.$$

Chaque terme de la somme est < 0, et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. De même on montre que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.

4. Le sens direct est évident par le théorème de Pythagore en notant que $x \perp x - p(x)$.
   Pour le sens réciproque, soient $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on applique l'hypothèse à $x + \lambda y$: $\|p(x+\lambda y)\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2$. On en déduit

   $$\lambda^2\|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle.$$

   La fonction affine $\lambda \mapsto \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle$ est donc positive, donc son coefficient directeur $\langle x, y\rangle$ est nul.
5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. On rappelle que pour tous $u, v, w \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle u \wedge v, w\rangle$.

($\Rightarrow$) Supposons que f est une rotation. On a

$$\begin{aligned}\langle f(u) \wedge f(v), f(w)\rangle &= \det(f(u), f(v), f(w)) \\ &= \det(u, v, w) \\ &= \langle u \wedge v, w\rangle \\ &= \langle f(u \wedge v), f(w)\rangle\end{aligned}$$

f étant bijective, $f(u \wedge v) - f(u) \wedge f(v)$ est orthogonal à tout vecteur de E, et donc est nul.

($\Leftarrow$) Soit i, j, k une base orthonormée directe de E. On a $i \wedge j = k$, donc $f(i) \wedge f(v) = f(k)$. De même, $f(k) \wedge f(i) = f(j)$, et donc $(f(i), f(j), f(k))$ forme une famille orthogonale. On a aussi $\|f(i)\|\|f(j)\|\|\| = \|f(k)\|$ et $\|f(k)\|\|f(i)\| = \|f(j)\|$, et donc $\|f(i)\|^2\|f(j)\| = \|f(j)\|$. Si $f(j) = 0$, alors $f(i) = f(j) = f(k) = 0$, et alors f est nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $f(j) \neq 0$, et donc $\|f(i)\| = 1$.
De même, on montre que $(f(i), f(j), f(k))$ est une famille orthonormée. Les relations sur les produits vectoriels montrent même qu'elle est directe.
f envoie donc une base orthonormée directe sur une base orthonormée directe, et donc f est une rotation.

6. On note que si x est une solution, alors $\langle a, b\rangle = 0$. Donc si a et b ne sont pas orthogonaux, il n'y a pas de solutions. Supposons donc a et b orthogonaux.

   On remarque que $x_0 = b \wedge a/\|a\|^2$ est une solution de l'équation, et on note que x est solution de l'équation si et seulement si $a \wedge (x - x_0) = 0$.

   Les solutions sont donc $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Vect}(a)$.

7. Soit R une rotation solution, s'il en existe une. R n'est pas l'identité, et son axe est dirigé par $u = i - j + k$.

   Soit $v = -3i + u$. On a $v \perp u$, et donc l'angle de la rotation est déterminé par

$$\cos\theta = \frac{\langle v, R(v)\rangle}{\|v\|\|R(v)\|} = -\frac{1}{2}$$

   et $\sin\theta$ est du signe de

$$\det(v, R(v), u) = -9 < 0.$$

   Finalement, on a $\theta = -2\pi/3$. Réciproquement, cette rotation convient.

8. Par définition du produit vectoriel, on a

$$\det(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = \langle (a \wedge b) \wedge (b \wedge c), c \wedge a\rangle.$$

   Par formule du double produit vectoriel (!)

$$(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = \langle a \wedge b, c\rangle b = \det(a, b, c)b.$$

   Finalement, comme $\langle b, c \wedge a\rangle = \det(b, c, a) = \det(a, b, c)$, on a bien le résultat voulu.

9.