Entiers naturels - Ensembles finis

1 Questions de cours

1. Montrer que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

2. Soit $P(n)$ une propriété qui dépend de n. On suppose qu'on a $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \rightarrow P(n+1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

3. Montrer que si E est un ensemble fini, alors $\mathfrak{p}(E)$ est fini, de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$.

2 Applications directes

1. Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 = 2,\ u_1 = 3,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1.$$

2. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies (preuve ou contre-exemple) :
   (i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$
   (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
   (iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$
   (iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$

3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \mid n^3 - n.$$

3 Exercices

1. Montrer que pour tout n,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

2. Soient n, p et q des entiers tels que $n \leqslant p + q$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \neq 0\ [2\pi]$:
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Calculer pour tout n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}.$$

5. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, vérifiant $f(2) = 2$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ f(pq) = f(p)f(q)$. Montrer qu'alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.$$

6. Pour chaque entier n, on note ξ_n la fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
$$\begin{cases} \xi_0(x) = 2^x \\ \xi_n(0) = 1 \\ \xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x)) \end{cases}$$
Montrer que pour tous n et x entiers, on a
$$\xi_n(x) > x.$$

7. Soit E un ensemble de cardinal n. On pose
$$\mathscr{A}_1 = \{(A,B) \in \mathfrak{p}(E)^2 \mid A \subseteq B\} \text{ et}$$
$$\mathscr{A}_2 = \{(A,B) \in \mathfrak{p}(E)^2 \mid A \cup B = E\}.$$
Donner les cardinaux de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

8. Une grenouille monte un escalier de n marches, en faisant des bonds de 1 ou 2 marches.
De combien de façon peut-elle atteindre le sommet de l'escalier ?

4 Corrections

4.1 Applications

1. Récurrence double :
   On a $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$.
   Supposons qu'on a $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.
   On a alors
   $$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2 \times 2^n - 2 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$
   D'où le résultat.
2. (i) Pour $\alpha = 1$, $a_i = 0$ et $n = 2$, on a
   $$\sum_{i=1}^{n}(\alpha + a_i) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$
   et
   $$\alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + 0 + 0 = 1.$$
   (ii) C'est vrai.
   (iii) C'est vrai aussi.
   (iv) On prend $a_i = b_i = 1$ et $n = 2$. On a alors
   $$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$
   et
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = (1 + 1) \times (1 + 1) = 4.$$
3. Par récurrence.
   On a $3 \mid 0$ clairement.
   Supposons que 3 divise $n^3 - n$.
   Alors $n^3 - n = 3k$ pour un certain entier k.
   On a
   $$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3k + 3n^2 + 3n \\ &= 3(k + n^2 + n) \end{aligned}$$
   Donc $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$.
   Par récurrence, on a le résultat.

4.2 Exercices

1. On montre par récurrence que
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
et
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
2. On calcule de deux façons $(1+x)^p \times (1+x)^q$.
$$\begin{aligned}(1+x)^p \times (1+x)^q &= (1+x)^{p+q}\\ &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k\end{aligned}$$
Le coefficient de x^n est donc $\binom{p+q}{n}$.
On a aussi
$$(1+x)^p \times (1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j\right)$$
Les termes en x^n proviennent des produits $x^i \times x^j$ pour $j = n - i$.
Donc le coefficient de x^n dans le produit précédent est
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$
3. Par récurrence, en ayant bien révisé ses formules de trigo.
4. On connaît la relation
$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}.$$
Cela nous donne
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}\\ &= (-1)^n \binom{2n}{n}\end{aligned}$$
5. Soit $P(n)$ la proposition $f(n) = n$. On montre $\forall n\ P(n)$ par récurrence forte sur n.
   - On a $f(2 \times 0) = f(2) \times f(0) = 2f(0) = f(0)$.
     Donc $f(0) = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'on a $P(0), P(1), \ldots, P(n)$.

Si $n+1$ est pair, alors $n+1=2p$ et donc

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= f(2p)\\
&= f(2)\times f(p)\\
&= 2\times p\\
&= n+1
\end{aligned}$$

et si $n+1$ est impair, $n+1=2p+1$, et alors $2p<n<2p+2$. Par croissance stricte

$$f(2p)<f(n+1)<f(2p+2).$$

Or on a $f(2p)=2p$ par hypothèse de récurrence, et

$$\begin{aligned}
f(2p+2) &= 2f(p+1)\\
&= 2p+2
\end{aligned}$$

Donc $f(n+1)$ est compris strictement entre $2p$ et $2p+2$, et donc $f(n+1)=n+1$.

6. Montrons-le par récurrence sur n.
   Soit donc ϕ_n la proposition « Pour tout entier x, $\xi_n(x)>x$ ».
   - Il est assez clair que ϕ_0.
   - Soit n un entier. Supposons ϕ_{n-1}, et montrons ϕ_n. Pour cela, faisons une récurrence sur x.
     Soit donc ψ_x la proposition « $\xi_n(x)>x$ ».
     - ψ_0 est toujours clair.
     - Soit x un entier. Supposons ψ_{x-1} et montrons ψ_x.
       On a par définition $\xi_n(x)=\xi_{n-1}(\xi_n(x-1))$, et donc, par ϕ_{n-1} on a $\xi_n(x)>\xi_n(x-1)$, c'est-à-dire

       $$\xi_n(x)\geqslant \xi_n(x-1)+1.$$

       D'après ψ_{x-1}, $\xi_n(x-1)>x-1$, d'où ψ_x

     On a donc ϕ_n.

   Donc, par récurrence, on a le résultat.
7.
8. On regarde pour différents n.
   Si $n=0$ ou 1, alors on a une seule manière.
   Si $n=2$, alors on a deux manières.
   Maintenant, si on connaît le nombre pour un nombre de marches strictement inférieur à $n+2$, alors pour atteindre la $n+2$-éme marche, il y a deux façons :
   - monter à la n-éme marche, puis faire un saut de deux marches ;
   - monter à la $n+1$-éme marche, puis faire un saut d'une case.

   On a donc, en appelant $f(n)$ le nombre cherché

   $$f(n+2)=f(n+1)+f(n),$$

   avec $f(0)=f(1)=n$.
   On reconnaît ici la suite de Fibonacci, dont on connaît le terme général

   $$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\overline{\varphi}^n)\qquad \text{où } \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \overline{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$