1 Questions de cours

1. En utilisant la formule avec les permutations, montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.
2. Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que
$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$
3. Montrer que dans un corps K dans lequel $2 \neq 0$, une application n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

2 Applications

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que $f^2 = -I$. Montrer que E est de dimension paire.
2. Calculer, pour $a, b, c \in \mathbb{C}$:
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$.

3 Exercices

1. Soit M une matrice à coefficients entiers. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et M^{-1} soit à coefficients entiers.
2. On appelle *dérangement* une permutation sans point fixe. Y a-t-il plus de dérangements impairs ou de dérangements pairs dans $\mathfrak{S}_n$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.
5. Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que si la dimension de l'espace est impair, A n'est pas inversible.
6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note A^+ la transposée de la comatrice de A. Montrer que si A est inversible, alors A^+ aussi, et $A^{++} = (\det A)^{n-2} A$.
7. Soient $A \in \mathscr{M}_k(K)$, $C \in \mathscr{M}_{n-k}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{k,n-k}(K)$. Calculer le déterminant de
$$D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$
8. Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $Com(AB) = Com(A)Com(B)$.
9.

4 Corrections

4.1 Applications

1. On a $\det(f)^2 = \det(-I) = (-1)^n$. Donc n est pair.
2. En développant, on obtient $2abc$.
3. On utilise la formule avec les permutations, et les propriétés de morphisme de la conjugaison.

4.2 Exercices

1. On montre que la CNS est $\det(M) = \pm 1$.
   Si M et M^{-1} sont à coefficients entiers, alors $\det M$ et $1/\det(M)$ sont des entiers inverses l'un de l'autre, et donc $\det M = \pm 1$.
   Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, alors $1/\det(M) = \pm 1$, et donc M^{-1} est $\pm$ la transposée de la comatrice de M, qui est à coefficients entiers.
2. On note D_n l'ensemble des dérangements d'ordre n, et Δ_n la différence entre les dérangements pairs et impairs. On a donc
   $$\Delta_n = \sum_{\sigma \in D_n} \varepsilon(\sigma).$$
   Notons A la matrice ayant des 0 sur la diagonale, et des 1 partout ailleurs. On a alors
   $$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$
   S'il existe un i tel que $\sigma(i) = i$, alors le produit est nul. Finalement,
   $$\det A = \Delta_n.$$
   Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $u = (1, \ldots, 1)$. On a
   $$\begin{aligned}\Delta_n &= \det(u - e_1, \ldots, u - e_n)\\ &= \det(-e_1, \ldots, -e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(-e_1, \ldots, -e_{i-1}, u, -e_{i+1}, \ldots, -e_n)\\ &= (-1)^n + n(-1)^{n-1}\\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\end{aligned}$$
   Finalement, si n est impair, il y a plus de dérangements pairs que impairs, et si n est pair, il y a plus de dérangements impairs.

3. La fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale, donc continue, et ne s'annule pas à 0. Donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de 0, d'où un ε qui convient.
4. On ajoute la première colonne de A à toutes les suivantes : chaque colonne de 2 et n sont à coefficients dans $\{0, -2, 2\}$. En factorisant 2 sur ces colonnes, on obtient

$$\det A = 2^{n-1} \det B,$$

   où B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
5. On a $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. Donc $\det A = 0$.
6. On a $AA^+ = \det(A)I$, donc $\det(A^+) = \det(A)^{n-1} \neq 0$.
   De même, $A^+A^{++} = \det(A^+)I = \det(A)^{n-1}I$. En multipliant à gauche et à droite par A, on a le résultat.
7. Il suffit de noter que

$$D = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right]$$

   puis de développer la première matrice par rapport à la première colonne, et la seconde par rapport à la dernière ligne.
8. On a

$$\begin{aligned} Com(AB) &= \det(AB)^t(AB)^{-1} \\ &= \det(A)^t A^{-1} \det(B)^t B^{-1} \\ &= Com(A)Com(B) \end{aligned}$$

9.