# Dérivation

## 1 Questions de cours

1. Montrer le théorème de Rolle :
   Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Montrer que si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in [0,\infty]$, alors $g \circ f$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$.

3. Montrer le théorème suivant :
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, qui admet un extremum local en un point $a$ qui n'est pas une extrémité de $I$. Alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse.

## 2 Applications

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier
   $$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

2. Montrer qu'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas ne peut pas être périodique.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que la dérivée de $f$ s'annule.

## 3 Exercices

1. En utilisant la fonction $x \mapsto x^{2n}$, calculer
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_\infty f = f(0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

3. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables, avec $\forall x \in [a,b],\ g'(x) \neq 0$.
   (i) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
   (ii) Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que
   $$\frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4. (i) Montrer que pour tout $x > 0$
   $$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
   (ii) Calculer pour $k > 2$
   $$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère
$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}.$$
   (i) Montrer que les tangentes en 0 des fonctions $f_\lambda$ sont parallèles.
   (ii) Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ qui s'annule pour une suite de points $(\theta_n)$. On suppose que $\theta_n \to \theta$. Que valent $f(\theta)$ et $f'(\theta)$ ?

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable périodique. Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que $T$ est une période de $f$ *si et seulement si* $T$ est une période de $f'$.

8. Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un point de $I$ qui n'en est pas une extrémité. On appelle *dérivée centrale de $f$ en $a$* la limite quand $h$ tend vers 0 de
$$f_c(h) = \frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right).$$
   (i) Montrer que si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$, alors elle admet une dérivée centrale en $a$.
   (ii) La réciproque est-elle vraie ?

9. Donner un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable, dont la dérivée s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

# 4 Corrections

## 4.1 Applications

1. On a
$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{(x-a)f(a)+a(f(a)-f(x))}{x-a} \\ &\to f(a)-af'(a)\end{aligned}$$
2. Sinon, on applique le théorème de Rolle.
3. $f$ est dérivable donc continue sur le segment $[a,b]$, et donc admet un maximum, où la dérivée de $f$ s'annule.

## 4.2 Exercices

1. On a par calcul direct
$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n.$$
Ensuite on a par formule de Leibniz
$$\begin{aligned}\left(x^{2n}\right)^{(n)} &= (x^n \times x^n)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n\end{aligned}$$
On en déduit
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
2. Si $f$ est constante, c'est trivial. Sinon, soit $x_0$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$. On pose
$$y = \frac{1}{2}(f(x_0)+f(0).$$
C'est une valeur intérmédiaire entre $f(0)$ et $f(x_0)$, et par théorème des valeurs intermédiaires, on a donc l'existence d'un $a \in ]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$.
Pour $x_1$ assez grand, comme $\lim_\infty f = f(0)$, on a que $y$ est compris entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$, et donc il existe $b > x_0$ tel que $f(b) = y$.
On peut donc appliquer le théorème de Rolle sur $[a,b]$ et conclure.

3. (i) C'est la réciproque de Rolle.
   (ii) Soit $h : x \mapsto g(x)(f(b)-f(a)) - f(x)(g(b)-g(a))$. On vérifie que $h$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle pour conclure.
4. (i) On applique le théorème des accroissements finis à ln entre $x$ et $x+1$ :
   il existe $c \in ]x, x+1[$ tel que $\ln(1+x) - \ln(x) = \frac{1}{c}$.
   On conclut en utilisant $x < c < x+1$.
   (ii) On somme les inégalités obtenues pour avoir
$$\ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right) \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \ln(k),$$
   et on conclut que la limite cherchée vaut $\ln(k)$.
5. (i) On a
$$f_\lambda'(x) = \frac{-x^2 - 2x\lambda + 1}{(x^2+1)^2}.$$
   Donc $f_\lambda'(0) = 1$, d'où le résultat.
   (ii) L'équation de la tangente en 1 à la courbe de $f_\lambda$ est
$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-2) + \frac{1}{2}.$$
   Elles sont donc concourantes au point $(2, 1/2)$.
6. On a par continuité de $f$ $f(\theta) = 0$.
   Par théorème de Rolle, pour tout $n$ il existe un réel $a_n$ entre $\theta_n$ et $\theta_{n+1}$ tel que que $f'(a_n) = 0$. On a alors
$$\begin{aligned}|\theta - a_n| &\leqslant |\theta - \theta_n| + |\theta_n - a_n| \\ &\leqslant |\theta - \theta_n| + |\theta_{n+1} - \theta_n| \\ &\to 0\end{aligned}$$
   Par continuité, on a donc $f'(\theta) = 0$.
7. Le sens direct est évident.
   Réciproquement, on suppose que $T$ est une période de $f'$. Soit $g : x \mapsto f(x+T) - f(x)$. Alors $g$ est dérivable, et $g' = 0$ par hypothèse.
   $g$ est donc une fonction constante, égale à un certain $c \in \mathbb{R}$, et donc $f(x+T) = f(x) + c$, et par récurrence immédiate $f(nT) = f(0) + nc$.
   $f$ est périodique continue, donc bornée, et donc nécessairement $c = 0$.
8. (i) On a
$$f_c(h) = \frac{1}{2h}(f(a+h-f(a)) + \frac{1}{-2h}(f(a-h) - f(a)),$$
   et en passant à la limite
$$f_c(h) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}\left(f_d'(a) + f_g'(a)\right).$$

(ii) La fonction $\sqrt{|x|}$ contredit la réciproque.

9. On vérifie que $x \mapsto \sin(x) + x$ convient.