Coniques

1 Questions de Cours

2 Applications directes

1. Donner la nature et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne
$$2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy = 1.$$
2. Donner la nature et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne
$$x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}(x + y) = 0.$$
3. Donner la nature et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne
$$x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}(x - y) = 0.$$

3 Exercices

1. On donne une plaque carrée de côté a. Déterminer l'ensemble des points qui sont plus près du bord que du centre de la plaque.

2. Étudier l'ensemble des points (x, y) du plan caractérisé par la relation $xy + x - y = 0$.

3. Soient $\mathscr{D}$ une droite, A un point non sur $\mathscr{D}$ et m un réel positif.
Déterminer les points M tels que
$$AM + \mathrm{dist}(M, \mathscr{D}) = m.$$

4. Soit $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 3.
Montrer que la courbe Γ définie par
$$\Gamma = \{(x, y) \mid P(x) = P(y)\}$$
est la réunion d'une droite et d'une courbe qui est soit triviale, soit une ellipse dont on précisera l'excentricité.
5. Soient a et b deux réels non nuls. On considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation $bx^2 + ay^2 = ab$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.
Parmi les graphes suivants, lesquels sont possibles ?

6. On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + 2x - 1$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $2x^2 - y^2 + 1 = 0$ dans un repère orthonormé.
   (i) Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ se coupent en quatre points.
   (ii) Montrer que ces points sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
7. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que les points d'affixes z, z^2, z^5 soient alignés.
8. Soient A un point et $\mathscr{D}$ une droite du plan telle que $A \notin \mathscr{D}$.
   (i) Déterminer le lieu des foyers de paraboles admettant $\mathscr{D}$ comme directrice et passant par A.
   (ii) Quel est l'ensemble des sommets de ces paraboles ?
9. Soit E une famille infinie de points du plan euclidien, tous à distance entière les uns des autres. Montrer que tous les points de E sont alignés.

4 Corrections

4.1 Applications

1. On fait subir au repère canonique une rotation de $\pi/6$.
   L'équation devient alors
   $$\frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1.$$
   On a donc une ellipse de centre O, avec
   $$a = \sqrt{2},\ b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ e = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$
2. On fait subir au repère canonique une rotation de $\pi/4$.
   L'équation devient alors
   $$(X+1)^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 1.$$
   On a donc une hyperbole, avec
   $$a = 1,\ b = \sqrt{2},\ c = \sqrt{3},\ e = \sqrt{3}.$$
3. On fait subir au repère canonique une rotation de $\pi/4$.
   L'équation devient alors
   $$X^2 - 4Y^2 = 0.$$
   On a donc une parabole, d'excentricité 1.

4.2 Exercices

1. Le problème est invariant par symétrie d'angle $\pi/2$.
   On considère un côté de la plaque, que l'on prolonge en une droite. Les points équidistants de cette droite et du centre définissent une parabole.
   Si O est le centre du carré, et si $M = (x, y)$ est plus près d'un bord que de la droite, on a
   $$\left(x \pm \frac{a}{2}\right) < x^2 + y^2,$$
   et donc M doit être à l'extérieur des paraboles d'équations
   $$y^2 \pm ax - \frac{a^2}{4} = 0 \text{ et } x^2 \pm ay - \frac{a^2}{2}.$$

2. On effectue le changement de variables :
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y)$$
c'est-à-dire une rotation d'angle $-\pi/2$.
L'équation devient alors
$$\left(\frac{X-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$
On obtient une hyperbole équilatère de sommet $S(\sqrt{2},0)$ dans le nouveau repère, d'axe (OX).
Dans le repère canonique $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'hyperbole est de sommet $(-1,1)$, d'axe dirigé par $\vec{i}-\vec{j}$.
3. On appelle $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ les deux droites parallèles à $\mathscr{D}$ à distance m de $\mathscr{D}$.
Pour tout point M dans la bande délimitée par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, on a
$$\operatorname{dist}(M,\mathscr{D}') = m - \operatorname{dist}(M,\mathscr{D}).$$
L'égalité cherchée est donc équivalente à
$$AM = \operatorname{dist}(M,\mathscr{D}'),$$
et donc on appelle $\mathscr{P}'$ la parabole de foyer A et de directrice $\mathscr{D}'$.
De même, on appelle $\mathscr{P}''$ la parabole de foyer A et de directrice $\mathscr{D}''$.
On pose alors
$$\mathscr{P} = (\mathscr{P}' \cap \operatorname{Bande}(\mathscr{D},\mathscr{D}')) \cup (\mathscr{P}'' \cap \operatorname{Bande}(\mathscr{D},\mathscr{D}'')).$$
Alors si M est dans $\mathscr{P}$, on a $AM + \operatorname{dist}(M,\mathscr{D}) = m$, et si M n'est pas dans $\mathscr{P}$, l'égalité n'est pas vérifiée.
4. On a
$$P(x) = P(y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ x^2+xy+y^2+a(x+y)+b=0. \end{cases}$$
Donc Γ est la réunion de $\mathscr{D}\ :\ y=x$ et de
$$\mathscr{E}\ :\ x^2+xy+y^2+a(x+y)+b=0.$$
On applique une rotation de $\pi/4$ à $\mathscr{R}=(O,i,j)$ pour obtenir le repère $\mathscr{R}'=(0,u_{\pi/4},v_{\pi.4})$.
On a alors, si M est de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ et (X,Y) dans $\mathscr{R}'$:
$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \text{ et } y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

Donc
$$M \in \mathscr{E} \iff \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{2}aX + b = 0.$$
Selon les valeurs de a, b, la courbe est soit vide, soit réduite à un point, soit une ellipse d'excentricité
$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

5. L'équation de la conique se réécrit
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1.$$
   (a) Dans ce cas, la droite nous dit que $a < 0$ et $b > 0$. Donc la conique doit être une parabole, ce qui n'est pas le cas.
   Ce cas est donc impossible.
   (b) Ici, $a > 0$ et $b < 0$, et donc la conique est une hyperbole, d'axe focal Ox. Ce cas est possible.
   (c) Ici encore $a > 0$ et $b < 0$, et donc la conique doit être une hyperbole d'axe focal Ox. L'axe ici est Oy donc ce cas est impossible.
   (d) On a $a < 0$ et $b < 0$, et donc la conique est vide.
6. (i) Un point (x, y) est à l'intersection des deux coniques *si et seulement si*
$$x^4 + 4x^3 - 4x = 0.$$
   On pose $P(x) = x^3 + 4x^2 - 4$. L'étude P nous indique que P admet 3 racines réelles non nulles, et donc on a bien quatre points d'intersection.
   (ii) Les points d'intersection sont sur tous les ensembles
$$\mathscr{C}_{u,v} \ : \ u \times (x^2 + 2x - 1 - y) + v \times (2x^2 - y^2 + 1) = 0.$$
   Le choix de $u = 3$ et $v = -1$ nous donne un cercle, de centre
$$\Omega = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$$
   et de rayon
$$r = \frac{\sqrt{61}}{2}.$$
7. Si $z \in \mathbb{R}$ c'est évident.
   Soit donc $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
   z,z^2 et z^5 sont alignés *si et seulement si* $\dfrac{z^5 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$, c'est à dire
$$z^3 + z^2 + z = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 + \overline{z}.$$

Ceci équivaut à

$$(z-\overline{z})(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2+z+\overline{z}+1)=0,$$

et comme $z \notin \mathbb{R}$:

$$(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2+z+\overline{z}+1)=0.$$

On pose $z = x+iy$ pour trouver

$$3x^2-y^2+2x+1=0,$$

c'est-à-dire l'équation d'une hyperbole, d'équation réduite

$$\frac{Y^2}{\frac{2}{3}}-\frac{X^2}{\frac{2}{9}}=1.$$

8. (i) Soit $\mathscr{P}$ une parabole qui convient, et soit F son foyer.
   On a alors
   $$FA = \operatorname{dist}(A,\mathscr{D}),$$
   donc F appartient au cercle de centre $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $r = \operatorname{dist}(A,\mathscr{D})$.
   Donc $F \in \mathscr{C}\backslash\mathscr{D}$.
   Inversement, ces paraboles conviennents.

   (ii) Soient S le sommet F le foyer d'une parabole adéquate.
   On note K le projeté de F sur $\mathscr{D}$.
   S est alors le milieu de $[FK]$.
   Un paramétrage cartésien nous dit que l'ensemble des commets est une ellipse d'excentricité $e=\sqrt{3}/2$.

9. Supposons que tous les points ne sont pas alignés. Soient donc A,B et C trois points non alignés.
   Si $P \notin (AB)$ et $P \notin (BC)$. Alors l'inégalité triangulaire nous donne
   $$|PA-PB| \leqslant AB \text{ et } |PB-PC| \leqslant BC.$$
   Toutes ces distances sont dans $\mathbb{N}$, donc pour chaque point P, il existe deux entiers $i_P \leqslant AB$ et $j_P \leqslant BC$ tels que $|PA-PB| = i_P$ et $|PB-PC| = j_P$.
   D'après la définition bifocale des hyperboles, P est donc à l'intersection de deux hyperboles : une de foyers A et B, l'autre de foyers B et C (on considère la médiatrice de deux points comme une hyperbole dégénérée).
   On peut faire la même manipulation si $P \notin (AC),(BC)$ ou $P \notin (AB),(AC)$.
   Pour résumer, tout point P est à l'intersection de deux des trois hyperboles suivantes :
   – d'équation bifocale $|PA-PB| = i_P \leqslant AB$
   – d'équation bifocale $|PB-PC| = j_P \leqslant BC$
   – d'équation bifocale $|PC-PA| = k_P \leqslant AC$.
   Les axes focaux de ces hyperboles sont distincts, et donc l'intersection de deux de ces hyperboles contient un nombre fini de points.
   Finalement, on ne trouve donc qu'un nombre fini de points P du plan distincts de A,B,C.
   D'où une contradiction.