Nombres complexes

1 Questions de cours

1. Énoncer les formules d'Euler.
2. Énoncer la formule de Moivre.
3. Énoncer les inégalités triangulaires.

2 Applications directes

1. Linéariser $\cos^4(\theta)$. En déduire
$$\cos^4(\pi/8) + \cos^4(3\pi/8) + \cos^4(5\pi/8) + \cos^4(7\pi/8).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|1 + a| + |a + b| + |b| \geqslant 1.$$

3 Exercices

1. Théorème de Napoléon : Soit (ABC) un triangle quelconque. On construit sur les côtés de (ABC) des triangles équilatéraux (CBP), (ACQ) et (BAR). On note A' B' et C' les isobarycentres de ces trois triangles. Montrer que $(A'B'C')$ est un triangle équilatéral.
Comparer les isobarycentres de (ABC) et de $(A'B'C')$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On cherche à montrer que les solutions de l'équation
$$pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k \qquad (E_p)$$
différentes de 1 sont toutes de modules strictement inférieur à 1.
   (i) Montrer que les solutions de (E_p) sont de module inférieur à 1.
   (ii) Soit z une solution de E_p. On suppose que z est d'argument θ et de module 1. Montrer que
$$e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin(p\theta/2)}{p\sin(\theta/2)}.$$
   En déduire une contradiction.

3. Soient u et v deux complexes. On pose $z = u + iv$. Donner une condition *nécessaire et suffisante* sur u et v pour qu'on ait
$$|z|^2 = u^2 + v^2.$$
4. Soient a et b deux complexes non nuls vérifiant $a + b \neq 0$. Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$
5. Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et soit $c = \frac{a-b}{1-\overline{a}b}$. Montrer que $|c| = 1$ *si et seulement si* $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.
6. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\alpha + k\beta) \text{ et } S' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\alpha + k\beta).$$

4 Corrections

4.1 Cours

1. Formules d'Euler :
$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$
2. Formule de Moivre :
$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$
3. Inégalités triangulaires :
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{ et } ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

4.2 Applications

1. $$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$
$$S = \frac{3}{2}.$$
2. *Indice :* Passer aux modules.
$$|z^3| = |z|$$
$$||z|(|z|^2 - 1) = 0$$
$$|z| = 0 \text{ ou } |z| = \pm 1$$
Donc $z = 0$, ou z est de module 1, *i.e* $\overline{z} = \frac{1}{z}$. D'où z est une racine quatrième de l'unité. Réciproquement, ok.
3. On part de $|1| = |1 + a - a - b + b|$, puis on utilise l'inégalité triangulaire.

4.3 Exercices

1. On note $j = e^{2i\pi/3}$. On a
$$p - c = -j^2(b-c),$$
d'où
$$p = -jc - bj^2.$$
De même, on trouve
$$q = -cj^2 - aj \text{ et } r = -aj^2 - bj.$$
On note α, β, γ est affixes de A', B', C'. On trouve
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1-j}{3}(c - j^2 b)\\ \beta &= \frac{1-j}{3}(a - j^2 c)\\ \gamma &= \frac{1-j}{3}(b - j^2 a)\end{aligned}$$
Il ne reste qu'à vérifier que $\gamma - \alpha = -j^2(\beta - \alpha)$.
On vérifie enfin que $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{a+b+c}{3}$.

2. (i) Soit z une solution de module r. On a alors
$$pr^p \leqslant \frac{r^p - 1}{r - 1},$$
soit
$$pr^p(r-1) - r^p + 1 \leqslant 0.$$
Or le polynôme correspondant est strictement croissant après 1, et vaut 0 en 1.

   (ii) Soit $z = e^{i\theta}$ différent de 1, solution de (E_p).
On a alors
$$\begin{aligned}pz^p &= pe^{ip\theta}\\ &= \frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}}\\ &= \frac{-2i\sin(p\theta/2)e^{ip\theta/2}}{-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}}\end{aligned}$$
$$\frac{\sin(p\theta/2)}{p\sin(\theta/2)} = e^{i(p+1)\theta/2}$$
On a donc $e^{i(p+1)\theta/2}$ réel, et donc $(p+1)\theta/2 = k\pi$, soit $p = \frac{2k\pi - \theta}{\theta}$.
On obtient alors
$$e^{i(p+1)\theta/2} = (-1)^k = \frac{\sin(-\theta/2 + k\pi)}{p\sin(\theta/2)} = -\frac{(-1)^k}{p},$$
et on en déduit
$$p = -1.$$

3. On a toujours
$$|z|^2 = (u+iv)(\overline{u} - i\overline{v}),$$
et la factorisation
$$u^2 + v^2 = (u+iv)(u-iv).$$
On a donc
$$\begin{aligned} & |z|^2 = u^2 + v^2 \\ \iff \quad & (u+iv)(\overline{u} - i\overline{v}) = (u+iv)(u-iv) \\ \iff \quad & (u+iv)(\overline{u} - u - i\overline{v} + iv) = 0 \\ \iff \quad & u + iv = 0 \text{ ou } u - \overline{u} = i(v - \overline{v}) \end{aligned}$$
On a donc $z = 0$, ou $i\Im(u) = -\Im(v)$, *i.e* u et v réels.
4. Par analyse-synthèse.
Soient a et b tels que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. On a alors
$$\frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab}.$$
On pose $S = a+b$ et $P = ab$, et on a alors $S^2 = P$. Donc a et b sont solutions de $X^2 - SX + S^2 = 0$.
Cela nous donne (par exemple) $a = -jS$ et $b = -j^2S$, $S \in \mathbb{C}^*$.
Réciproquement, les complexes de cette forme conviennent.
5. On a
$$\begin{aligned} |c| = 1 \quad & \iff \quad |a-b| = |1 - \overline{a}b| \\ & \iff \quad (a-b)(\overline{a} - \overline{b}) = (1 - \overline{a}b)(1 - a\overline{b}) \\ & \iff \quad |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 + 1 = 0 \\ & \iff \quad (|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$
6. On va calculer $Z = S + iS'$, puis identifier les parties réelles et imaginaires.
$$\begin{aligned} Z &= e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\beta} \\ &= e^{i\alpha}(e^{i\beta} + 1)^n \\ &= e^{i\alpha}(e^{i\beta/2} 2\cos(\beta/2))^n \\ &= 2^n \cos^n(\beta/2) e^{i(\alpha + n\beta/2)} \end{aligned}$$