Comparaison des suites

1 Questions de cours

1. Soient u et v deux suites de réels non nuls. Montrer que
$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).$$

2. Montrer que si deux suites sont équivalentes, alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.
3. Montrer que si deux suites sont équivalentes, et que l'une converge, alors l'autre converge aussi, vers la même limite.

2 Applications

1. Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :
$$u_n = \frac{1}{n},\ v_n = \frac{1}{n^2},\ w_n = \frac{\ln n}{n},$$
$$x_n = \frac{\ln n}{n^2},\ y_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

2. Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :
$$u_n = n,\ v_n = n^2,\ w_n = n \ln n,$$
$$x_n = \sqrt{n} \ln n,\ y_n = \frac{n^2}{\ln n}.$$

3. Donner des équivalents de :
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),\ v_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right).$$

3 Exercices

1. Soient u, v, w, t des suites de réels strictement positifs, telles que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Montrer que
$$u_n + w_n \sim v_n + t_n.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k!.$$
Montrer que $u_n \sim n!$.

3. Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) converge vers O^+, et donner un équivalent simple de (u_n).

4. Montrer qu'on ne peut pas "passer à l'exponentielle" dans les équivalents. Montrer que si la différence des suites tend vers 0, alors on peut.

5. Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

   (i) $n\sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

   (ii) $\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

   (iii) $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

6. On pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   (i) Montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   (ii) Déterminer la limite de (S_n).

   (iii) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.

   (iv) Donner un équivalent simple de (S_n).

4 Corrections

4.1 Applications

1. On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} &\ll \frac{\ln n}{n^2}\\ &\ll \frac{1}{n\ln n}\\ &\ll \frac{1}{n}\\ &\ll \frac{\ln n}{n}\end{aligned}$$
2. On a
$$\begin{aligned}\sqrt{n}\ln n &\ll n\\ &\ll n\ln n\\ &\ll \frac{n^2}{\ln n}\\ &\ll n^2\end{aligned}$$
3. On a
$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et
$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \to 0,$$
et donc
$$v_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n.$$

4.2 Exercices

1. On a
$$\begin{aligned}\left|\frac{u_n+w_n}{v_n+t_n}-1\right| &= \left|\frac{(u_n-v_n)+(w_n-t_n)}{v_n+t_n}\right|\\ &\leqslant \frac{|u_n-v_n|}{v_n}+\frac{|w_n-t_n|}{t_n}\\ &= \left|\frac{u_n}{v_n}-1\right|+\left|\frac{w_n}{t_n}-1\right|\\ &\to 0\end{aligned}$$

2. On écrit
$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!.$$
On a $\frac{(n-1)!}{n!} \to 0$, et
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$
Finalement, $\frac{u_n}{n!} \to 1$.
3. (u_n) est décroissante, et donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme $u_n + u_{n+1} \to 0$, on a $\ell = 0$. A partir d'un certain rang, on a $2u_n \geqslant u_n + u_{n+1} > 0$.
On a $u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n$, et donc $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
4. On a $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} = ee^n \not\sim e^n$.
Si $u_n - v_n \to 0$, alors $e^{u_n}/e^{v_n} = e^{u_n - v_n} \to 1$.
5. (i) On a $u_n \sim n\sqrt{\frac{1}{n^2}}$, et donc $u_n \to 1$.
   (ii) $u_n \sim e^{n \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$, et $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.
   Finalement, $u_n \to e^1 = e$.
   (iii) On a
$$u_n = \exp\left(\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1)\right).$$
   Or $\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\ln n - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, et
$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}.$$
   Comme $\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$, on a
$$\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right) \to 0,$$
   et donc $u_n \to 1$.
6. (i) On utilise la quantité conjuguée.

(ii) On a donc

$$S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Donc par théorème des gendarmes, $S_n \to +\infty$.

(iii) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant 0$, et donc (u_n) est décroissante.

Or $u_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$, donc (u_n) est minorée, et finalement (u_n) converge.

(iv) On a

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}.$$