Applications

1 Questions de cours

1. Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective *si et seulement si* f est inversible à gauche.
2. Soit $f : E \to F$. Montrer que f est surjective *si et seulement si* f est inversible à droite.
3. Soit $f : E \to F$. Montrer que si f est bijective, alors les inverses à gauche et à droite de f sont uniques et égaux.

2 Applications

1. Soient f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

   (i) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

   (ii) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles injectives/surjectives/bijectives ?

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

   (i) Donner les plus grands E et F possibles pour que f soit injective.

   (ii) Donner les plus grands E et F possibles pour que f soit surjective.

   (iii) Donner les plus grands E et F possibles pour que f soit bijective.

3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

   Montrer que f est bien définie et bijective.

3 Exercices

1. Soit A un ensemble non vide. Donner une injection de A dans $\mathfrak{p}(A)$.
   Montrer que A ne peut pas être en bijection avec $\mathfrak{p}(A)$.
2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
   Expliciter la bijection.
   En déduire que $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
3. Soit $f : X \to Y$ une application. Soient

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(Y) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \text{ et } \nabla : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}(Y) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(X) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

(i) Montrer

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \Delta \text{ injective } \Leftrightarrow \nabla \text{ surjective.}$$

(ii) *Peut-être un peu long* Montrer

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \Delta \text{ surjective } \Leftrightarrow \nabla \text{ injective.}$$

4. Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(A) \times \mathfrak{p}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}.$$

   (i) Calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$. Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que f soit injective.
   (ii) Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que f soit surjective.
   (iii) Si f est bijective, donner une expression de f^{-1}.
5. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective *si et seulement si* f est surjective.
6. Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose pour tout $i \in I$,

$$A_i = f^{-1}(\{i\}).$$

   Montrer que les A_i forment une partition de E (ils sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E).
7. Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective *si et seulement si*

$$\forall A, A' \in \mathfrak{p}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

8. Soit $f : E \to F$. Montrer que F est bijective *si et seulement si*

$$\forall A \in \mathfrak{p}(E),\ f(E \backslash A) = F \backslash (f(A)).$$

9. Montrer que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ est dénombrable (*i.e* en bijection avec $\mathbb{N}$).
   (on pourra admettre :
   – toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ;
   – toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.)

4 Corrections

4.1 Applications

1. (i) f est injective, pas surjective ni bijective.
   g n'est pas injective ni bijective, mais surjective.
   (ii) On a $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$ qui est bien sûr bijective, et $g \circ f(k)$ vaut k si k est pair, $k-1$ sinon (ce n'est ni surjectif, ni injectif).
2. (i) $E = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$.
   (ii) $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^+$.
   (iii) $E = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}^+$.
3. f est bien définie, car le résultat est toujours dans $\mathbb{Z}$.
   Soient n et m tels que $f(n) = f(m)$. Étant donnée la définition de f, n et m ont nécessairement même parité. Dans les deux cas n et m pairs et n et m impairs, on trouve $n = m$.
   Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geqslant 0$, alors $m = f(2m)$, et si $m < 0$ alors $m = f(-2m-1)$.
   Finalement, f est bijective.

4.2 Exercices

1. Soit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathfrak{p}(A) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array}.$$
Alors φ est une injection de A dans $\mathfrak{p}(A)$.
Supposons qu'il existe une bijection ψ entre A et $\mathfrak{p}(A)$.
Considérons $X = \{x \in A \mid x \notin \psi(x)\}$.
On a $X \in \mathfrak{p}(A)$, et donc on peut considérer $x = \psi^{-1}(X)$.
Alors si $x \in X$, $x \notin X$ et si $x \notin X$, $x \in X$. Contradiction.
2. On fait un dessin. Puis on explicite la bijection
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n, p & \longmapsto & \frac{1}{2}(n+p)(n+p+1) + p \end{array}.$$
Informellement, pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dénonombrable, on utilise le même procédé en "sautant" les couples (p, q) où $p \wedge q \neq 1$.
3. (i) *Supposons f injective, et montrons Δ injective.* Soient A, B dans $\mathfrak{p}(X)$ tels que $\Delta(A) = \Delta(B)$, *i.e* $f(A) = f(B)$.
Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(B)$, et donc il existe $b \in B$ tel que $f(a) = f(b)$. Par injectivité de f, on a $a = b$, et donc $a \in B$.
A et B étant symétrique, on a $A = B$.
Supposons Δ injective, et montrons ∇ surjective. Soit A dans $\mathfrak{p}(X)$.
On a $\Delta(\nabla(\Delta(A))) = \Delta(A)$. Par injectivité de Δ, on a $\nabla(\Delta(A)) = A$.
Supposons ∇ surjective, et montrons f injective. Soient x et y dans X tels que $f(x) = f(y) := z$.
Alors, par surjectivité de ∇, il existe A et B dans $\mathfrak{p}(Y)$ tels que $\{x\} = \nabla(A)$ et $\{y\} = \nabla(B)$.
Alors $z \in A$ et $z \in B$. On a donc
$$\{x\} \subseteq f^{-1}(\{z\}) \subseteq f^{-1}(A) \text{ et } \{y\} \subseteq f^{-1}(\{z\}) \subseteq f^{-1}(B).$$
Comme ce sont en fait des égalités, on a $\{x\} = \{y\}$.
(ii) *Supposons f surjective, montrons ∇ injective.* Soit $B \in \mathfrak{p}(Y)$. On montre $B = f(f^{-1}(B))$, et on en déduit l'injectivité de ∇.
Supposons ∇ injective, montrons Δ surjective. C'est la même preuve que la question précédente.
Supposons Δ surjective, montrons f surjective. Soit $y \in Y$. Alors il existe $A \in \mathfrak{p}(X)$, $\{y\} = \Delta(A)$.
Alors tout x de A convient.
4. (i) On a $f(A \cup B) = (A, B)$ et $f(E) = (A, B)$.
CNS : $E = A \cup B$.
(ii) *CNS : $A \cap B = \emptyset$.*
(iii) $f^{-1}(X, Y) = X \cup Y$.
5. On suppose f injective. Soit $y \in E$.
On a $f(y) = f(f \circ f(y))$, et par injectivité $y = f(f(y))$. Donc f est surjective. On suppose f surjective.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
$f \circ f$ est surjective, et donc $\exists a, b \in E,\ x = f \circ f(a)$ et $y = f \circ f(b)$. Comme $f(x) = f(y)$, on a $f^3(a) = f^3(b)$, d'où $f(a) = f(b)$.
En composant à nouveau par f, on a $x = y$.
6. f est surjective, et donc les A_i sont non vides.
Soient i et j dans I.

$$A_i \cap A_j = \{x \in E \mid f(x) = i \text{ et } f(x) = j\}.$$

Donc si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soit $x \in E$. Alors $x \in A_{f(x)}$.

7. Supposons f injective. Soient A et A' dans $\mathfrak{p}(E)$.
Soit $x \in f(A \cap A')$. Alors il existe $y \in A \cap A'$ tel que $x = f(y)$. Mais $y \in A$ donc $x \in f(A)$, et $y \in A'$ donc $x \in f(A')$.
Soit $x \in f(A) \cap f(A')$. Alors il existe $y \in A$ et $y' \in A'$ tels que $x = f(y) = f(y')$. Comme f est injective, on a $y = y'$, et donc $x = f(y)$ avec $y \in A \cap A'$.

   Supposons maintenant
$$\forall A, A' \in \mathfrak{p}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$
Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x') := y$.
Alors $y \in f(\{x\})$ et $y \in f(\{x'\})$ donc par hypothèse, $y \in f(\{x\} \cap \{x'\})$.
Si on avait $x \neq x'$ alors $\{x\} \cap \{x'\}$ serait vide, et donc y n'existerait pas. Donc $x = x'$.

8. Supposons f bijective. Soit $A \in \mathfrak{p}(E)$.
Soit $y \in f(E \backslash A)$: il existe $x \in E \backslash A$ tel que $y = f(x)$. On va montrer que pour tout $y' \in f(A)$, $y \neq y'$.
Soit donc $y' \in f(A)$: $y' = f(x')$, $x' \in A$. Comme $x \notin A$, on a $x \neq x'$ et donc $f(x) \neq f(x')$. Donc $y \neq y'$, et par suite $y \in F \backslash f(A)$.
Réciproquement, soit $y \in F \backslash f(A)$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $x \notin A$, d'où $y \in f(E \backslash A)$.

   Supposons maintenant
$$\forall A \in \mathfrak{p}(E),\ f(E \backslash A) = F \backslash (f(A)).$$
Soient x et x' dans E tels que $x \neq x'$. Alors $x' \in E \backslash \{x\}$, donc $f(x') \in F \backslash \{f(x)\}$.
Donc $f(x) \neq f(x')$.
On a $f(E) = F \backslash (F \backslash f(E)) = F \backslash f(E \backslash E) = F \backslash \emptyset = F$.
Donc f bijective.

9. Soit $A \in \mathfrak{p}(\mathbb{N})$ infini. On construit une fonction $f\ :\ \mathbb{N} \to A$ par récurrence :
   - $f(0)$ est le plus petit élément de A ;
   - $A_0 = A$;
   - $A_1 = A_0 \backslash \{f(0)\}$;
   - Si $f(n-1)$ et A_n sont construits, $f(n)$ est le plus petit élément de A_n ;
   - $A_{n+1} = A_n \backslash \{f(n)\}$.

   f est strictement croissante, donc f est injective.
On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$.
Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leqslant a\}$, pour un $a \in A$.
E est une partie de n bornée par a, donc admet un plus grand élément, soit n_0 : on a alors $f(n_0) \leqslant a < f(n_0 + 1)$.
Si on avait $f(n_0) \neq a$, alors $f(n_0 + 1)$ ne serait pas le plus petit élément de $A_{n_0} \backslash \{f(n_0)\}$, ce qui est contraire à la définition.
Donc $f(n_0) = a$, et donc f est surjective.