Espaces vectoriels de dimension finie

1 Questions de cours

1. Énoncer et montrer le théorème de la base incomplète.

2. Soit E de dimension finie n et F un sous-espace de E. Montrer que F est de dimension finie $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

3. Soit E un espace vectoriel, de dimension finie, et F et G deux sous-espaces de E. Quelle est la dimension de $F + G$ (formule+démonstration) ?

2 Applications

1. Soient $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$. (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que pour tout $p \leqslant n$

   $$\mathrm{Rg}(x_1, \ldots, x_p) \geqslant \mathrm{Rg}(x_1, \ldots, x_n) + p - n.$$

3. Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un espace E de dimension n. Montrer que soit $D \subseteq H$, soit D et H sont supplémentaires dans E.

3 Exercices

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in \mathrm{GL}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B} = (f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ soit une base de E.

   Montrer que f est un isomorphisme.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Que peut-on dire d'un $u \in \mathscr{L}(E)$ qui laisse stable tous les sous-espaces de dimension k de E ?

4. On appelle *endomorphisme nilpotent* tout endomorphisme u de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

   Montrer que si $\dim E = n$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, alors $u^n = 0$.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Trouver une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $\operatorname{Im} f = \ker f$ *si et seulement si* n est pair.

7. Soit F un sous-espace vectoriel strict d'un espace E de dimension finie. Montrer qu'on peut écrire F comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplan.

8. Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie. (On pourra montrer que la famille $(\ln(p))_p$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers est libre).

9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}$. Montrer que f et g commutent.

4 Corrections

4.1 Applications

1. Montrons que la famille est libre : si λ, μ et ν sont trois réels tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \end{cases}$$
On en déduit directement $\lambda = \mu = \nu = 0$, et donc la famille est libre. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, la famille est bien une base.
2. On a toujours
$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) + \mathrm{Vect}(x_{p+1}, \dots, x_n).$$
Or $\dim(\mathrm{Vect}(x_{p+1}, \dots, x_n)) \leqslant n - p$, et donc on a directement le résultat.
3. $D + H$ est de dimension n ou $n-1$. Si c'est $n-1$ il est clair que $D \subseteq H$. Sinon $D + H = E$. Comme de plus $\dim D + \dim H = n$, D et H sont bien supplémentaires.

4.2 Exercices

1. Il est clair que les homothéties commutent avec tout le monde. Réciproquement, soit f dans le centre de $\mathrm{GL}(E)$, et supposons que f n'est pas une homothétie.
Alors pour un certain $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est libre et on peut donc la compléter en une base $(u, f(u), e_3, \dots, e_n)$.
Soit g l'application linéaire définie sur cette base par
$$\begin{aligned} g(u) &= u \\ g(f(u)) &= u + f(u) \\ g(e_i) &= e_i \end{aligned}$$
Alors g envoie une base de E sur une base de E (le vérifier), et donc $g \in \mathrm{GL}(E)$. Or $g(f(u)) = u + f(u)$ et $f(g(u)) = f(u)$, qui sont donc égaux puisque f est dans le centre de $\mathrm{GL}(E)$. On en déduit $u = 0$, ce qui est impossible.
2. Il suffit de remarquer que si $y \in E$, alors on peut écrire
$$y = \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_n f^n(x_0),$$
c'est-à-dire
$$y = f(\lambda_1 x_0 + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x_0).$$
Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. Finalement, f est surjective, donc bijective car en dimension finie.

3. Pour $n = 1$, on a que u est une homothétie (on utilise le lemme u homothétie $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x, u(x))$ liée).
   Soit donc $k \in \{2, \dots, n-1\}$, et soit H sous-espace de dimension $k-1$. On a $\dim H \leqslant n-2$, et donc il existe (e_1, e_2) libre telle que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit en somme directe avec H.
   On pose alors $H_1 = \mathrm{Vect}(H \cup \{e_1\})$ et $H_2 = \mathrm{Vect}(H \cup \{e_2\})$.
   On a alors $H_1 \cap H_2 = H$ et $\dim H_1 = \dim H_2 = k$.
   Finalement, si u laisse stable tous les sous-espaces de dimension k, alors u laisse stable tous les sous-espaces de dimension $k-1$. Une récurrence triviale permet de conclure.
4. Soit p le plus petit entier tel que $u^p = 0$. Supposons $p > n$. Alors comme $u^{p-1} \neq 0$, on peut choisir $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   E est de dimension n, et $\mathscr{F} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille de $p > n$ vecteurs : cette famille est liée. Donc on peut écrire une relation du type
   $$\lambda_k u^k(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0,$$
   avec $\lambda_k \neq 0$. En appliquant u^{p-1-k} à cette égalité, on botient $\lambda_k = 0$. D'où une contradiction.
5. Supposons qu'on ait un tel v. Alors $\mathrm{Im}(v) \subseteq \ker(u)$ et donc $\mathrm{Rg}(v) \leqslant n - \mathrm{Rg}(u)$. De plus $n = \mathrm{Rg}(u+v) \leqslant \mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v)$.
   Finalement, $\mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v) = n$, et il s'ensuit $\mathrm{Im}(v) = \ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = E$. Cette somme est nécessairement directe, et donc $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.
   Réciproqiement supposons $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ supplémentaires. Soit v le projecteur parallèlement à $\mathrm{Im}(u)$ sur $\ker(u)$. Il est clair que $u \circ v = 0$.
   Soit $x \in \ker(u+v)$. Alors $u(x) = -v(x)$ et donc $u(x) \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Donc $u(x) = 0 = v(x)$, et donc $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Donc $x = 0$.
6. Si un tel f existe, alors $n = \dim E = \mathrm{Rg}(f) + \dim\ker f = 2\,\mathrm{Rg}(f)$, et donc n est pair.
   Réciproquement, supposons que $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E, et soit f définie par, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:
   $$f(e_i) = 0,\ \ f(e_{p+i}) = e_i.$$
   Alors f convient.
7. On pose $n = \dim E$, $p = \dim F$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en une base de E $(e_1, \dots, e_n)$.
   Posons pour tout i $H_i = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\} \backslash \{e_i\})$. Les H_i sont des hyperplans, et on vérifie que
   $$F = \bigcap_{i=1}^{n-p} H_{p+i}.$$
8. Il est clair que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
   Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ tels que
   $$\sum \lambda_i \ln(p_i) = 0.$$

Quitte à multiplier par les dénominateurs, on peut supposer que les λ_i sont entiers, et quitte à renuméroter, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ et $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$.

On a alors

$$p_1^{\lambda_1} \times \cdots \times p_n^{\lambda_r} = p_{r+1}^{-\lambda_{r+1}} \times \cdots p_n^{-\lambda_n}.$$

Par unicité de l'écriture en produit de facteurs premiers, on a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Donc la famille considérée est libre, et donc $\mathbb{R}$ est de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$.

9. On a $f \circ (f+g) = \mathrm{Id}$, et donc f est inversible d'inverse $f+g$. Donc $(f+g) \circ f = 0 = f^2 + g \circ f$. D'où le résultat.