Espaces vectoriels

1 Questions de cours

1. Montrer que toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

2. Soient F et G deux sous-espaes vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $G+F$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$.

3. Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe *si et seulement si* leur intersection est $\{0\}$.

2 Applications

1. Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + xf'(x) + \cos(x)f(x) = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E. Montrer que
$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G.$$

3. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace E. Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(g)$.

3 Exercices

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient p et q deux projecteurs de $\mathscr{L}(E)$.
   (i) Montrer que $p+q$ est un projecteur *si et seulement si* $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (ii) Montrer que si $p+q$ est un projecteur, alors $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

2. Montrer que $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
$$F(A) \subseteq f(B) \Leftrightarrow A + \ker(f) \subseteq B + \ker(f).$$

4. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que
$$g \circ f \circ g = g;$$
$$f \circ g \circ f = f.$$
   (i) Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.
   (ii) Justifier que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

5. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que
$$\forall A \in \mathfrak{p}(E),\ f(\mathrm{Vect}\, A) = \mathrm{Vect}\, f(A).$$

6. Soit E un espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie *si et seulement si* $\forall x \in E,\ (x, f(x))$ est liée.

7. Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ où
$$x \oplus y = xy \text{ et } \lambda \cdot x = x^\lambda$$
est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

8. Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels d'un espace E. Montrer que
$$F_1 \cap F_2 + F_1 \cap F_3 \subseteq F_1 \cap (F_2 + F_3).$$
L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

4 Corrections

4.1 Applications

1. Cela vient directement du fait que $\mathscr{C}^2$ est un espace vectoriel, et que la dérivation est linéaire.
2. Pour le sens direct, on a $F \subseteq F + G = F \cap G \subseteq G$, et de la même façon $G \subseteq F$. Le sens réciproque est trivial.
3. Si $g \circ f = 0$ alors pour tout x, $f(x) \in \ker(g)$, et donc $\text{Im}(f) \subseteq \ker(g)$.
   Pour la réciproque, c'est identique.

4.2 Exercices

1. (i) Pour le sens direct, on a $(p+q)^2 = p+q$, et on en déduit $p \circ q + q \circ p = 0$. Dans cette dernière égalité, on compose par p à droite, puis toujours dans la même égalité, par p à gauche, et on obtient $p \circ q = q \circ p$, puis $= 0$.
   Dans l'autre sens, c'est immédiat en vérifiant $(p+q)^2 = p+q$.
   (ii) Il est clair que $\ker p \cap \ker q \subseteq \ker(p+q)$. Soit donc x tel que $p(x) + q(x) = 0$. En composant par p à droite, $p(x) + q \circ p(x) = 0$, puis $p(x) = 0$ par la première question. De même, $q(x) = 0$.
2. Sinon, il existe une combinaison linéaire nulle :
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i = 0.$$
   Quitte à réorganiser les termes, on peut supposer que tous les μ_i sont non nuls, et que $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$. On a alors
$$e^{-\lambda_1 x} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^{\lambda_i x} \right) = \sum \mu_i e^{(\lambda_1 - \lambda_1)x}.$$
   En faisant tendre x vers l'infini, on obtient $\mu_1 = 0$, d'où une contradiction.
3. Supposons $f(A) \subseteq f(B)$. Soit $x \in A + \ker f$: on peut écrite $x = u + v$ avec $u \in A$ et $f(v) = 0$. Alors $f(x) = f(u) \in f(A) \subseteq f(B)$, et donc il existe $w \in B$ tel que $f(x) = f(w)$. Alors $x = w + (x - w)$, avec $w \in B$ et $x - w \in \ker f$.
   Réciproquement, supposons $A + \ker f \subseteq B + \ker f$. Soit $y \in f(A)$: il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in A \subseteq A + \ker f \subseteq B + ker f$, et donc on peut écrire $x = u + v$, $u \in B$ et $f(v) = 0$.
   Alors $y = f(x) = f(u) \in f(B)$.

4. (i) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$. On peut écrire $x = f(a)$, $a \in E$, donc

$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0.$$

Donc la somme est bien directe. Soit $x \in E$. On pose $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$. Il est clair que $u \in \operatorname{Im} f$, et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$, c'est-à-dire $v \in \ker g$.

(ii) On a directement $f(\operatorname{Im} g) \subseteq \operatorname{Im} f$, et si $y \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $y = f(x)$ pour $x = g(a) + u$ où $u \in \ker f$.
Alors $y = f(g(a)) \in f(\operatorname{Im} g)$.

5. Pour le sens direct, $A \subseteq \operatorname{Vect} A$, et donc $f(A) \subseteq f(\operatorname{Vect} A)$, pui $\operatorname{Vect} f(A) = \operatorname{Vect} f(\operatorname{Vect} A)$. Or $f(\operatorname{Vect} A)$ est déjà un sous-espace de F, et donc on a bien l'inclusion directe.
Inversement, $f^{-1}(\operatorname{Vect} f(A))$ est un sous-espace de E, qui contient A, donc $f(A) \subseteq f(f^{-1}(\operatorname{Vect} f(A))) \subseteq \operatorname{Vect} f(A)$.

6. Le sens direct est trivial. Supposons donc que toutes les $(x, f(x))$ sont liées :

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x x.$$

Soient x et y dans E, non nuls. Si (x, y) est liée, on a par exemple $x = \mu y$, et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_x x \\ &= f(\mu y) \\ &= \mu \lambda_y y \\ &= \lambda_y x \end{aligned}$$

Comme $x \neq 0$, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
Si (x, y) est libre, alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \lambda_{x+y}(x+y) \\ &= f(x) + f(y) \\ &= \lambda_x x + \lambda_y y \end{aligned}$$

Comme (x, y) est libre, $\lambda_x = \lambda_y$ (via λ_{x+y}).
Finalement, pour tous $x, y \in E$, $\lambda_x = \lambda_y$, et donc f est une homothétie.

7. Il suffit de vérifier les axiomes.

8. Si $x \in F_1 \cap F_2 + F_1 \cap F_3$, on peut écrire $x = y_2 + y_3$, où $y_2 \in F_1 \cap F_2$ et $y_3 \in F_1 \cap F_3$. Comme y_1 et y_2 sont dans F_1, x l'est aussi, et donc $x \in F_1 \cap (F_2 + F_3)$.
La réciproque est fausse : on peut par exemple considérer dans $\mathbb{R}^2$ les droites engendrées par $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$.